Екатерина Кукина

Века сквозь математику, или Как математики раз за разом мир вертели

Екатерина Кукина

Века сквозь математику, или Как математики раз за разом мир вертели

http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=70543996
SelfPub; 2024

Аннотация

Каждая книга возникает почему-то и зачем-то.Почему эта книга? Автор книги в течение 5 лет читала студентам математического факультета гуманитарный курс под названием "История математики в контексте истории культур". Ей нравилось. Студентам тоже.Зачем эта книга? Чтобы читателям тоже понравилось.Чтобы читатели заинтересовались математикой, заинтересовались историей, поняли, насколько же много исторических фактов никогда не приходитв голову историкам, увлеченным перестановкой на шахматной доске эпох фигурок королей, полководцев и президентов с их многочисленными армиями. Чтобы читатели поняли, что математика тоже влияет на ход истории. (Ну, собственно, как и физика, химия, компьютерные науки, а также любые другие науки вообще! Да наверняка, и история (наука) влияет на ход истории

(времени) – но автор данной книги не возьмется этого утверждать, так как не является историком.)

Содержание

Екатерина Кукина
Века сквозь математику, или Как математики раз за разом мир вертели

Предисловие автора

В один прекрасный момент мне достался для прочтения курс лекций «История математики в контексте истории культур». Математик до мозга костей, я никогда не мыслила гуманитарными категориями, а уж тем более не читала гуманитарный курс. Математик с самого рождения и по сегодняшний день, я нуждаюсь в доказательстве всего и вся. Доказательства, принятые в классической истории, не всегда меня устраивают.

Для того, чтобы прилично прочитать курс /**а я думаю, мне это в итоге удалось**/ мне пришлось расширить сознание, перевернуть свое мышление вверх тормашками и приглушить внутренний голос, который постоянно из глубин подсознания нашептывает: «а почему именно так? а точно так, а не иначе?»

Итак, если вы тоже математик, я вам объясню, какова историческая основа моего курса. Мы, неспециалисты в истории, не задаемся вопросом: "А точно ли взятие Сиракуз, при котором умер Архимед, состоялось в 212 году до нашей эры? А как мы это датировали? А точны ли методы датировки?" Эти вопросы мы оставляем на откуп историкам-профессионалам. Если историки датируют папирус Ринда приблизительно 1650 годом до нашей эры, примем эту дату. /* *В конце концов, позвольте профессионалам делать свое дело! Специализация – основа цивилизации.* */

Зачем вообще нужен на матфаке курс «История математики в контексте истории культур»? В этом курсе мы пытаемся проследить связь: как математика повлияла на историю и как наоборот история влияла на математику. Зачем? А затем, что математика способна изменить мир – и мы убедимся, что это не раз происходило уже в истории человечества.

Автор выражает глубокую признательность студентам, которые слушали курс, по мотивам которого возникла данная книжка. Невозможно передать то чувство, которое возникает у лектора, когда настроение в аудитории математиков и программистов от «История? Зачем нам вообще история?» меняется на «Вау! История – это интересно! А наши-то молодцы!» /**Спойлер: наши действительно молодцы! И "наши" – это, конечно же, математики.* */

Если честно, книг по истории математики опубликовано много: не одна, и даже не один десяток. А уж книг по истории… Чем же особенная эта? Я старалась сделать ее понятной среднему школьнику.

Наверное, зачастую, выкинув самую сердцевину математики, а оставив лишь истории про нее. И очень стремилась, чтобы книга вышла не занудной, не академической. Такой, какую приятно читать на ночь или в общественном транспорте. Наверное, это шло в ущерб точности и научности. Короче, я постараюсь просто рассказывать истории про историю и математику. И про то, как математика влияла на историю, а история на математику.

Вообще, оказывается, углубляться в историю математики – это очень-очень интересно, а порой – совершенно неожиданно. Вот, скажем, даже просто математическая генеалогия. Например, мой научный руководитель – Виталий Анатольевич Романьков. Его научный руководитель, а мой "научный дедушка" – Владимир Никанорович Ремесленников. Мой "научный пра-пра-пра-пра-дедушка" великий Павел Сергеевич Александров, а вот его "пра-пра-дедушка" – знаменитый Карл Вейерштрасс, научный внук самого Карла Гаусса, Короля математики. Таким образом, в моей прямой генеалогической научной линии встречаются все эти замечательные люди. Интересно? Мне кажется, очень[1]!

Клятвенно обещаю, что самое занудное в этой книге – данное предисловие.

---

[1] Однажды я придумала, что могу каждому студенту, выбравшему себе как специализацию что-то из математических наук на нашем факультете, выдавать справку о том, какая у него "математическая генеалогия". У кого-то в математических предках затесался Гаусс, как и у меня, у кого-то один Ляпунов (который А.М.), у кого-то другой (который А.А.), у кого-то Лобачевский, у кого-то Чебышёв. Было интересно! Хороший способ для студента почувствовать, что он связан с историей, и история это не где-то что-то постороннее, а что-то очень близкое.

А если вы нашли в книге опечатки, или хотите что-то обсудить, вы всегда можете прислать свои комментарии мне на электронную почту katpop@yandex.ru. Я все обязательно прочитаю, постараюсь опечатки исправить, и на вопросы по существу ответить.

Лекция 1

.

Доисторические времена

Глава, в которой математика еще почти не появляется. Только чуть-чуть.

Что такое "доисторические времена"? Все очень просто. Это времена, когда люди еще не изобрели письменность. И таким образом, не могли сами записывать свои истории. А вот когда мы уже можем прочитать о том, что творилось (как в «Повести временных лет», например) – это, соответственно, исторические времена.

Примерно 3 тысячи лет назад письменность уже точно появилась[2].

Но некоторые элементы математических знаний появились раньше письменности. Вот об этих-то ранних предпосылках возникновения математики мы и поговорим в этой главе.

Что за ранние математические знания нас интересуют? Во-первых, это числа. Во-вторых, это геометрические фигуры. В-третьих, это другие естественно-научные сведения (астрономические, например, которые способствуют возникновению и развитию прикладной математики). Ну, и в главных – абстрактное мышление. Для математики как ни для чего другого необходимо абстрактное мышление.

Счет возникает тогда, когда человек замечает, что между двумя баранами и двумя камушками есть что-то общее. А что общее? Это что-то – что-то очень неуловимое и, безусловно, абстрактное. Это число.

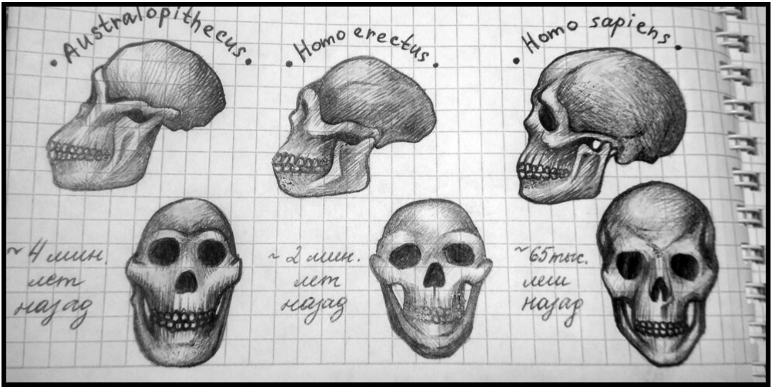
Геометрия возникает тогда, когда человек замечает, что между солнцем в небе и камнем на берегу моря есть что-то

---

[2] Конечно, письменность появилась не везде и не сразу. Многие народности и в начале 20 века еще жили на доисторическом уровне, без письменности. И, кстати, это тоже один из источников наших знаний о том, что знали доисторические люди, а чего не знали. В исторические времена европейцы наталкивались на народы без письменности, с другими системами счета и так далее, наблюдали за их укладом жизни....

общее. Это что-то – снова что-то очень неуловимое – форма.

Математика возникает тогда, когда человек перестает думать про конкретные объекты, а начинает думать про что-то неуловимое.



Итак, появился человек.

Рисунок 1.1: Иллюстрация из конспекта лекций

моей студентки Ангелины Андрейченко.

От австралопитеков (которые еще не "люди") произошли самые древние люди около 2,5 миллионов лет назад – человек Умелый, а позже из него Прямоходящий. В процессе эволюции люди учатся ходить на прямых ногах, не опираясь на руки. /* *Что позволяет им смотреть иногда не в землю, а на звезды! – что для нас намного существеннее в контексте* *математики.**/ Кисть руки трансформируется, что выражается в противопоставлении большого пальца. /* *Что позволяет нам теперь ловко держать ручку, кисточку и умело орудовать смартфоном одной рукой.**/ Ну, и самое главное – в процессе эволюции увеличивается мозг.

/**Кстати, забавный факт. Сначала примерно 2 миллиона лет эволюции мозг увеличивался и увеличивался. А вот последние 25 тысяч лет мозг человека уменьшается. Наш мозг процентов на 10 меньше, чем мозг Неандертальца и современного ему нашего предка, Человека Разумного. Ученые ушли думать и спорить, почему так.*

*А мозг женщин чуть-чуть меньше (процентов на 10) мозга мужчин. Наверное, потому, что женщины уже ушли еще дальше по лестнице эволюции.**/

Когда возникли люди, которые "Человек разумный разумный" (Homo Sapiens Sapiens)? То есть те люди, которые с биологической точки зрения уже как человек современный?

Если верить генетикам, человек разумный возник примерно 200 тысяч лет назад. Точнее, не так. "Ева" (самка, которая является предком всех ныне живущих людей) жила примерно 200 тысяч лет назад. А "Адам" (самец, который является предком всех ныне живущих людей) жил примерно 60 тысяч лет назад. /**Вот она – самая грустная история любви! А вы говорите: Ромео и Джульетта…* */ Примерно 68-ю тысячами лет датируются первые скелеты, которые можно отнести к Homo Sapiens. Один из самых древних (ему 45 тысяч лет) известных скелетов Homo Sapiens – Усть-Ишимский человек, найден /**минутка патриотизма!* */ на территории Омской области. Что говорит нам о том, что 45 тысяч лет назад люди разумные не просто возникли, а уже и расселились по территории Сибири. (Возникли они, все же, где-то на территории Африки).

Так когда же у людей появляются первые математические знания?

Пока люди не перешли от собирательства пищи и обычной охоты к активному производству (пищи, одежды, инструментов труда), они мало чем отличались от других видов млекопитающих. Их знания в математике и других науках никак не росли. Но в какой-то момент человек начал задумываться. О подобии форм. О производстве пищи. О выпасе скота. Эти процессы начались и пошли примерно одновременно.

Первые признаки абстрактного мышления, первые признаки воображения, можно отнести к возникновению наскальной живописи. А это примерно 35 тысяч лет назад. Знаменитые пещеры Альтамира в Испании и Ласко во Франции хранят великие картины тех времен[3].

К этому же периоду относятся найденные фигурки животных и людей. А также инструменты труда, украшенные узорами. Абстрактными узорами и даже периодическими орнаментами.

Поразительны примеры не просто абстрактных узоров. Абстрактные узоры – свидетельства абстрактного мышления и того, что человек тех времен знал понятие формы – но примеры явно осознанных, обдуманных попыток зафиксировать некоторые данные.

Первые такие попытки появляются на дордонийской дощечке, которой примерно 30 тысяч лет (подробнее можно прочитать в [2]), очень знаменитой вестоницкой кости примерно того же возраста, Ачинском жезле, которому примерно 20 тысяч лет, и который найден в Сибири (подробнее про него можно почитать в [4]), и прочие, прочие, прочие доисторические артефакты.

Зарубки на этих артефактах не похожи на случайные или художественные. Они похожи на запись каких-то данных.

---

[3] Когда я была маленькая, я любила иногда читать странные книжки. Например, книжку [2] Тома Придо "Кроманьонский человек" я читала, когда мне было лет 8-10. В этой книге было написано, что росписи в пещере Альтамира около 15 тысяч лет. А теперь в любом источнике можно найти, что роспись возникла за 35 тысяч лет до нашей эры. Отсюда, очевидно, не составит труда вычислить мой текущий возраст (хотя бы с точностью до тысячи лет).

Скорее всего, и дордонийская дощечка, и ачинский жезл – примеры календарей.

И явно, люди к этому моменту как минимум умели считать!

Даже одна из самых масштабных, древних и загадочных построек доисторических времен – Стоунхендж[4] – по мнению ученых, скорее всего, ни что иное как древний календарь. Совершенно точно, что его конструкция соответствует многим астрономическим явлениям. Вот какие усилия вкладывали древние люди для того, чтобы познать природу.

[4] Кстати, Стоунхендж не уникальный в своем роде. Ну, то есть, конечно, уникальный. Но в те времена, а то и раньше, люди строили много подобных же мегалитических конструкций. Например, Караундж на территории современной Армении.

Теория возникновения письменности.

Люди живут общиной, и пастух ведет баранов на пастбище. Как мы узнаем, что он всех привел обратно? Для этого брали сосуд, а в сосуд бросали камушки по количеству баранов. И когда пастух приводил баранов обратно, можно было свериться. /**И это, как сказали бы математики, – установление взаимно-однозначного соответствия между множествами баранов и камушков.**/ Но это рождало некоторый простор для махинаций. А вдруг пастух забрал камушек из сосуда? А вдруг кто-то подложил камушек в сосуд? Поэтому сосуд закупоривали. Но как тогда узнать количество камушков в нем, не разбивая? А очень просто – написать на боку!

И знаете, к какой мысли мы подходим вплотную? Именно числа стали скорее всего первым, что осмысленно писали люди. Сосуд, а на боку число 25 и нарисован бык – вот тебе и 25 быков ушло в поле. А уже потом изображение быка для скорости трансформировалось в букву "Алеф", постепенно превратившуюся в букву А.

Оказывается (и это уже не домысливания, а исторический факт), самые ранние примеры осмысленных записей имеют то или иное отношение к математике. Более того, сейчас практически установлено историками, что древняя письменность рождалась именно так – из необходимости писать числа. Была не полна, с помощью нее нельзя было описывать чудные мгновенья или великолепные виденья, а также уходящие вдаль тополиные аллеи. А рождалась письменность именно из необходимости писать числа. Вести бухгалтерию, если угодно (бухгалтерия, кстати, отделилась от математики в Средние века и с тех пор это две очень разные области знаний – но до того бухгалтерия, конечно, была областью прикладной математики).

Таким образом, нужды в математике (пусть, в той, примитивной доисторической математике, в умении просто считать) рождают письменность. Не потребность написать Илиаду, не потребность соблазнить женщину прекрасной песней, нет. "Сухие" числа и счет. И не говорите после этого, что математика не влияет на историю человечества!

Итак, в каких математических знаниях доисторического человека мы можем быть уверены? Доисторический человек начал абстрактно мыслить. Возникли представления о форме. Доисторические люди изобрели круг и колесо (и не только). Доисторические люди вытачивали камни в виде правильных платоновых тел, или даже изготавливали их из бронзы. Они начали не то, что изобретать и изготавливать орудия труда, но и начали делать некоторые совершенно фантастические инженерные вещи. Например, построили Стоунхендж, вытесали статуи на острове Пасхи, вообще создавали очень большое количество украшений и статуэток…

Люди, очевидно, начали мыслить, находить параллели и закономерности. Совершенно точно, наблюдали за Луной, за Солнцем и другими астрономическими объектами (в частности, уже отличали на звездном небе планеты от звезд).

И, конечно, люди научились считать. Можно даже прикинуть, когда примерно возник у человечества счет. В некоторых языках числительные очень похожи. Один-два-три в русском. Viens-divi-tris на латышском. One-two-three в английском. Eins-zwei-drei на немецком. Uno-dos-tres на испанском. Очень близкие по звучанию слова, не так ли? /**Но, заметьте, близкие по звучанию, но не по написанию!**/ Но если мы возьмем эти же слова на грузинском (эрти-ори-сами), или на китайском (и-эр-сэн), или на венгерском (эг-кет-хаором) или икси-какси-колме на финском – то эти слова уже совершенно другие, не похожие на наши один-два-три. Это показывает нам, что считать люди научились до разделения языков германской и славянской групп, но, скажем, после разделения ностратических языков. Что позволяет прикинуть, что осознанный счет возник позже десятого, но ранее пятого тысячелетия до нашей эры. /**Но это не точно. И, конечно, у разных народов чуть-чуть по-разному.**/

Какие книги можно еще почитать.

К главе 1 про доисторическую математику.

[1]

С. Дробышевский, Достающее звено, в 2 томах. – М.: Издательство АСТ, 2017.

/**Достаточно современная книга, написанная очень живым и понятным языком, хотя и с хорошим уровнем научности и академизма.**/

[2]

Т. Придо, Кроманьонский человек. – М.: Мир, 1979.

/**Старенькая уже книжка, некоторые исторические факты, изложенные в ней, уже уточнены (читай: неправильные). Однако, очень интересная, хорошо написанная и с большим количеством иллюстраций.**/

[3]

Э.Уайт, Д.Браун, Первые люди. – М.: Мир, 1978.

*/*Книжка из той же серии «Возникновение человека», что и [2], всего в той серии про доисторическую историю было 5 книг. Все классные, люблю их с детства (но именно эти две относятся к истории уже людей, а не до людей). Написаны все пять книг хорошо и с большим количеством иллюстраций. Рекомендую.*/*

[4]

В. Ларичев, Пещерные чародеи. – Новосибирск: Западно-сибирское книжное издательство, 1980 год.

*/*Книжка забавная. Популярная, с некоторым налетом эпатажа, но интересная, написана Виталием Ларичевым, академиком РАЕН, известным ученым, археологом, антропологом, востоковедом.*/*

[5]

Д. Стройк, Краткий очерк истории математики. – М.:Наука, 1990.

*/*Это очень нескучная книга по истории математики. Гораздо менее популярная, чем то, что вы читаете сейчас, но гораздо более полная (ну, в смысле, там больше всего понаписано).*/*

[6]

под ред. А. П. Юшкевича, «История математики с древнейших времен до начала XIX столетия» в 3 томах, т.1. – М.:Наука, 1970.

/«История математики» Юшкевича – это уже вообще серьезная книга по истории математики, можно ее счи-*

тать в некотором роде учебником по истории математики. Она написана не так забавно и занимательно, как все предыдущее, но зато гораздо более "академическая". Если вам именно этого не хватает в моей книжке – пожалуйста. Но надо учитывать, что некоторые данные из книги несколько устарели./

Лекция 2

.

Математика до возникновения математики

В некоторых частях света письменность возникла раньше, в других позже. Нас сейчас интересуют самые древние (из известных) письмена древних людей. А это – глинобитные таблички Междуречья (3,5 тысячи лет до н.э.) и папирусы Древнего Египта (около 2,4 тысяч лет до н.э.). Неоспоримые исторические свидетельства того, что математика тогда уже была.

Понятно, что письменность в те времена была делом дорогим (а также чисто технически долгим и трудным). Записывали только самое-самое важное. Самое-самое необходимое. И среди прочего – математические трактаты.

Почему я назвала эту главу "математика до возникновения математики"? Потому что математикой уже начали заниматься, начали копить некоторые математические знания, но собственно наука математика еще не возникает – она появится позже, в Древней Греции. И это, вообще-то, нормально. Чтобы возникла наука, ей нужен объект изучения. Астрономия возникла, когда уже были звезды. Анатомия – когда уже был человек. Так и тут. Многие занимались математикой еще до того, как это стало мейнстримом (и даже появилось такое слово!)

Итак, что же мы можем почерпнуть из ископаемых манускриптов?

2.1

Древний Египет

В Древнем Египте занимались математикой так называемые писцы. Они были чиновниками при египетских царях (фараонах). Передавали их указы военноначальникам, указывали рабам, как строить здания, рассчитывали налоги. (Т.е. вообще-то обладали очень большой властью и были людьми уважаемыми). Для всего этого им требовались знания математики.

Самый известный в мире математический папирус – папирус Ринда. Он около 32 сантиметров в ширину и более 5 метров в длину (2 куска длиной 3 метра и 2 метра хранятся в Британском музее; и еще кусок около 18 сантиметров утерян в веках). Этот папирус целиком посвящен разным математическим задачкам. Написан писцом по имени Ахмес примерно в 1650-м году до нашей эры. Но считается, что Ахмес переписывал его с еще более древнего манускрипта.

Самый древний из известных математических папирусов – Московский математический папирус, он написан около 1850 года до нашей эры. (Хранится в музее изобразительных искусств им.А.С.Пушкина).

/**Вы когда-нибудь обращали внимание, что самые интересные египетские папирусы хранятся вовсе не в Египте? Как и самые известные глинобитные вавилонские таблички вовсе не в Ираке.**/

Древние математические папирусы служили своеобразными учебниками математики – именно по ним изучали эту премудность новые писцы.

Итак, какого рода задачи можно встретить в папирусах? В папирусе Анастаси номер 1 читаем:

«Я ставлю тебя в тупик, когда приношу тебе повеление от твоего господина, тебе – его царскому писцу, поставленному во главе войска. Должно сделать насыпь для подъема в 730 локтей длины и 55 локтей ширины; она состоит из 120 отдельных ящиков и покрывается перекладинами и тростником. На верхнем конце она имеет высоту в 60 локтей, а в середине 30 локтей; уклон ее – дважды по 15 локтей, а настил

– 5 локтей. Спрашивают у военачальников, сколько понадобится кирпичей, и у всех писцов, и ни один ничего не знает. Все они надеются на тебя и говорят: "Ты искусный писец, мой друг, сосчитай это для нас поскорей. Смотри, имя твое славится. Сколько же надо для этого кирпичей?"»

И вот такого рода задачи приходится решать. А куда деваться?

*/*К счастью, современным математикам подобные задачи встречаются последний раз приблизительно в школе. Современные математики вообще не решают задачи с числами, только с буквами и прочими непонятными закорючками, типа $\int$, ∇ или $\searrow$. Помочь в вызове дьявола эти письмена то ли способны, то ли нет, но чтобы придать им какой-либо практический смысл обычно требуется примерно 200 лет.*/*

Числа египтяне записывали похоже на известные нам римские числа. Единицы – палочки. Десяток объединяли в символ в виде подковы. Сотню в символ в виде завитка. И так далее. Были символы для тысячи, десяти тысяч, сотни тысяч, миллиона. То есть система счисления у них десятичная, но цифры и, соответственно, позиционная запись числа еще не появляются. (Единицы, кстати, слева, потом десятки и т.д.). В такой системе записи удобно числа складывать (все символы записываем вместе, при необходимости 10 символов одного вида меняем на следующий). И удобно числа умножать на 2 (складывая само с собой). Вычитать (меньшее из большего, конечно) – тоже вполне легко. А большее из меньшего вычитать им не могло и в голову прийти!

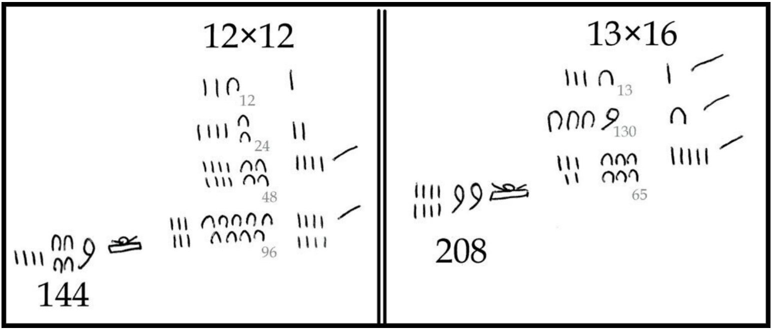


Рисунок 2.1: Два примера на умножение из папируса Ринда

А вот как египтяне умножали числа. (См.рис.2.1) Они число удваивали несколько раз и записывали результаты. В правой колонке – на что уже умножили. В левой – результат. Так удваивали до тех пор, пока сумма некоторых чисел в правом столбце не даст второй сомножитель. И складывали соответствующие числа из левой колонки.

Левый пример на рисунке как раз иллюстрирует такую типичную запись. Нам нужно посчитать 12×12. Удваиваем 12 несколько раз.

121=12, 122=24, 124=48, 128=96.

Тут мы замечем, что 12=4+8 (12 – число, на которое нам надо умножить; 4 и 8 – на которые мы уже умножили), и поэтому результат умножения получится 48+96=144.

Как мы видим, умножать – не такой уж легкий труд! А кроме того, египтяне при умножении фактически пользовались и двоичной записью числа.

Но иногда можно было использовать умножение на 10 сразу. На 10 ведь умножать легко. Просто все символы заменить на бóльшие. И тогда еще можно умножить на пять (поделить удесятеренное число пополам).

Правый пример на картинке как раз иллюстрирует атипичную запись, использует умножение на 10 и на 5. Нам нужно посчитать 13×16.

131=13, 1310=130, 135=65.

Поскольку 16=10+5+1, то результат умножения 130+65+13=208.

/**При таком умножении очевидно, что коммутативность умножения (то есть то, что от перестановки мест сомножителей произведение не меняется) – штука дааааалеко не очевидная! Чтобы ее заметить, надо быть очень опытным писцом. Практически, математическое открытие!**/

Как писцы выбирали метод умножения – неизвестно. Почему на 16 приведен пример в папирусе с умножением на 10 и на 5 (а не 4 раза удвоение) – непонятно. Почему на 12 нельзя было умножить на (10+2) – непонятно. То есть, никакого четкого алгоритма в их действиях, вообще говоря, не было. Хорошо, что умножение – это вам не бином Ньютона, все не мытьем так катаньем получалось рано или поздно. В папирусах, собственно, ничего не объяснялось. Просто разбирались примеры. /**Делай так, и будет тебе счастье!**/

Рисунок 2.2: Пример на деление из папируса Ринда

/**А попробуйте сами для прикола произвести какие-нибудь умножения по-египетски. Ну, напирмер, 23 на 25. Спорим, в процессе вам волей-неволей захочется воскликнуть что-то типа: «Да, ёшкин кот, египетский бог!»**/

Обратите внимание также на закорючку в виде закрытого и запечатанного списка (возможно, именно она позднее трансформировалась в символ равенства) – она ставится перед ответом и означает, что вычисление, собственно, выполнено. Свиток запечатан, получите, распишитесь.

Ох, как же сложно все с делением! Вы же уже представили? Деление – операция обратная умножению. Т.е., например, надо вам поделить число 1120 на 80. (См. рисунок 2.2) Иными словами, вы должны подобрать множитель, который при умножении на 80 даст 1120. Подбираем. Умножаем 80 на 2 несколько раз. На 16 умножать смысла уже нет (т.к. получится 1280, что больше нужного нам 1120). На всякий случай умножаем и на 10 (потому что легко же!). Замечаем, что числа 800 и 320 из левой колонки дают нужный ответ 1120. Таким образом, результат деления 14. (Однако после знака "равно" писали все равно 1120. По форме записи пример на деление ничем не отличался от примера на умножение!)

Рисунок 2.3: Фрагмент Папируса Ринда.

Но самые заморочки начинались у египтян с дробями. Они признавали только дроби с числителем 1. Были и сложные дроби, которые составлялись как сумма нескольких обязательно разных простых дробей (с числителем 1). Сейчас такие дроби в математике так и называются "египетские дроби". Записывали они дроби в виде лунки над натуральным числом (фактически, только знаменатель, ведь числитель – всегда 1).

Соответственно, у египтян возникла совершенно отдельная задача – удвоение дробей. Т.к. они все умножения делали (или могли делать) через удвоение, то удвоение было очень базовой операцией. Научишься удваивать – научишься умножать дроби на любое натуральное число. Для удвоения дробей египтяне составляли таблицы.

Казалось бы, почему хуже, чем ?[5] Почему нельзя оставить две дроби с одинаковым знаменателем? Это самое "хуже" возникает после нескольких удвоений. Если не переписывать дроби, то они нарастают и нарастают. А если переписывать (тогда старшая дробь старше), то в сумме дробей не становится слишком много.

Египетскими дробями мы, конечно, сейчас не пользуемся, но они продолжают волновать умы математиков. До сих пор в математике есть открытые (не доказанные и не опровергнутые) вопросы про египетские дроби. Самый известный пример – гипотеза Эрдёша-Штрауса, которая утверждает, что дробь вида) можно представить в виде суммы ровно трех дробей с числителем 1.

[5] По правильному, по-египетски, сверху надо нарисовать "луночку", а не палочку – но палочку мне в нарисовать намного проще.

/*

На самом деле, можно очень долго описывать, как считали древние египтяне. Потому что ведь нет ничего радостнее, чем наблюдать за чужими мучениями, а египтяне явно мучились со всеми этими арифметическими действиями. Если вам хочется познакомиться поближе со счетом древних египтян, можно начать с прекрасной, подробной и очень умной книжки по истории математики [7].

*/

Геометрия у египтян была прикладной арифметикой. Как были задачи для подсчета налогов, так были задачи для подсчета количества кирпичей, необходимых для строительства пирамиды. Задачи по поиску объемов, площадей.

У египтян были правильные формулы для вычисления площадей треугольников, прямоугольников, трапеций.

Площадь произвольного четырехугольника вычислялась по формуле: произведение полусумм противоположных сторон.

/**Кстати, задачка для любознательных. Докажите, что формула дает правильный ответ тогда и только тогда, когда четырехугольник— прямоугольник.* */

Для вычисления площади круга использовали формулу , (здесь *d* – диаметр круга). Приближение, на самом деле, хорошее. По этому приближению выходит, что у них

Например, вавилоняне (которые знали побольше математики) использовали приближение а в древнекитайской математике приближение использовалось аж до начала 2 века нашей эры.

Объемы кубов, балок, цилиндров вычислялись правильно (площадь основания на высоту). Самая большая проблема была с переводом одних мер объема в другие. Правильно считали также объем пирамиды /**Ну, а куда им было деваться! Пирамиды были под прямым надзором президента, тьфу ты, фараона.**/ и даже объем усеченной пирамиды тоже считали правильно.

И – возможно, высшее достижение египтян в геометрии – с помощью натянутой веревки они умели строить прямые углы. Берем 12 одинаковых по длине веревок. Связываем между собой. Затем натягиваем так, чтобы получился треугольник со сторонами 3-4-5. Угол между 3 и 4 будет прямым.

правильным углом для постройки пирамиды.

Больше ничего геометрического с помощью каких-либо приборов египтяне не строили. Никогда ничего египтяне не доказывали. Собственно, вся египетская математика сводилась к громоздким арифметическим вычислениям – но и это уже не мало!

2.2

Древняя Месопотамия

Древняя Месопотамия, древний Вавилон, древние шумеры – речь идет примерно про одну и ту же географическую область, Междуречье (между двумя великими реками, Тигром и Евфратом), в основном эта область находится на территории современного Ирака. Область, которая на протяжении более, чем тысячелетия была ключевой в развитии (европейской) культуры. Именно здесь зародилась /* *или, по крайней мере, так считается* */ первая письменность (шумерские глиняные таблички, на которых трехгранными клинышками высекали необходимые письмена). И здесь же были сделаны одни из первых математических открытий, известных нам сейчас. Математика (особенно, арифметика) древних вавилонян была на голову выше, чем математика древних египтян.

Математикой в Вавилоне занимались опять писцы, которые были в отличие от египтян, скорее не чиновниками, а жрецами, людьми духовными. Впрочем, в те времена, когда египетские фараоны приравнивались к богам, различие это было ускользающе малым. Найденные глинобитные дощечки с математическими знаниями также, как и в Египте, носят обучающий характер. А иногда – это явные "справочники" для вычислений, таблицы.

Эти самые глинобитные дощечки встречаются разных размеров. Бывают многометровые, явно обломанные (т.е. раньше было больше). А бывают размером чуть ли не с ноготь /**может, это шпоры?**/. В основном же – около одной странички.

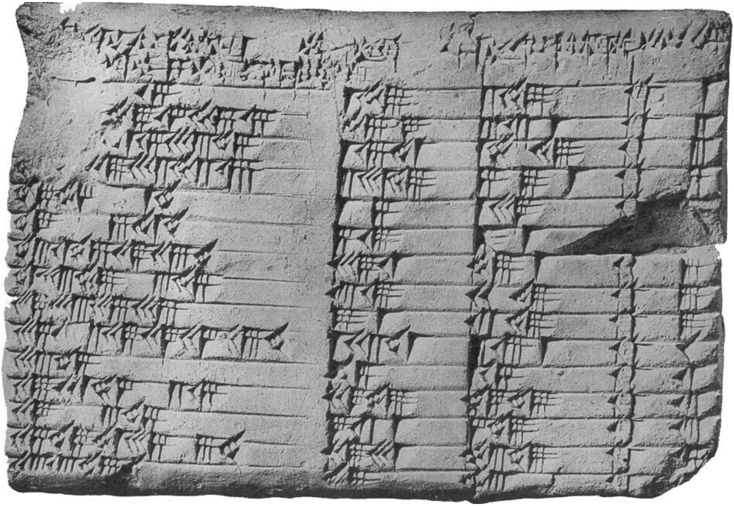


Рисунок 2.4: Глиняная табличка Plimpton 322, содержит то, что позже назовут "пифагоровы тройки чисел".

Как древние шумеры считали? В записи чисел шумеры использовали более прогрессивную – позиционную – запись числа (т.е. значение знака зависит от его позиции). Записывали они в 60-ричной системе счета. Числа до 60 записывались в обычной 10-ной системе (1 – один "клинышек", 10 – один "уголок"). Но число 60 снова обозначается как 1 (большая единица), и счет начинается снова. Иногда цифру более высокого разряда писали крупнее, но это уж как получится. Таким образом, "уголок" может означать как 10, так и десять шестидесяток, т.е. 600. Может означать и 1060^2,1060^3,

… В том числе, не только положительные, но и отрицательные степени записывались также. , т.е. записывается так же, как 10, одним "уголком". (Числа писали как мы, младшие разряды справа, старшие слева).

Например, 11 записываем "уголок-клинышек". А "клинышек-уголок" это уже значит, что "клинышек" выше разрядом, поэтому "клинышек-уголок" это 70.

Вся прелесть позиционной системы в том, что не надо выдумывать много цифр. Шумеры вот двумя символами обходились на все про все.

Для нас нет большой разницы, умножать 28 на 17, 280 на 17000 или же 2,8 на 0,17. (Надо только сообразить, куда ставить запятую или сколько приписывать нулей – т.е. надо понять порядок числа). Так же и для шумеров большой разницы не было. Правда, они использовали таблицу умножения от 1 до 59. /**Но вы же помните, что последние 10 тысяч лет объем мозга человека постоянно уменьшается? Каких-то 5 тысяч лет назад все грамотные люди держали в своей голове таблицу умножения 5959, сейчас же нельзя с уверенностью сказать, что современные люди помнят наизусть 78.**/

Вопрос с порядком числа в практических задачах обычно решается из контекста. Если мы говорим: "Я ее купил за 10", – то в зависимости от контекста (сумочка это, авторучка или квартира), мы понимаем, идет ли речь о тысячах рублей, рублях или миллионах. Так же вместо "2 324 рубля 35 копеек" мы, скорее всего скажем "Две-324-35", без указания разряда (тысячи), без добавления слов "рубли"/"копейки". Сложности с порядком чисел могли бы возникнуть в теоретических задачах, но их-то и не было!

Почему именно 60 основание системы счисления? Число уж больно удобное. Делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 5, и на 6. И поэтому у вавилонян была именно такая денежная система. В одном таланте 60 мин. В одной мине 60 шекелей. Удобно делить деньги.

Именно остатки 60-ричной вавилонянской системы до сих пор присутствуют в нашем счете времени. В одном часе 60 минут. В одной минуте 60 секунд. То же и с углами (просто между углами и временем связь вообще напрямую).

Обратите внимание: древние египтяне писали натуральные числа, даже дробные числа, но никогда не писали 0. Вавилоняне тоже писали и натуральные числа, и дробные числа, но ни о каком "числе 0" они ничегошеньки не знали. Спустя тысячу лет после первых математических текстов они, наконец, сообразили, что хорошо бы в числе пропущенный разряд как-то обозначать. И спустя тысячу лет после первых математических изысканий, придумали значок, обозначающий пропущенный разряд. Придумали 0-цифру, но все еще не 0-число. (Теперь стало можно отличать 60^3 от 60^2 или же $60^3 + 2$ от $60^3 + 2 \cdot 60$ и так далее).

/**Ноль – очень сложное число. Запомните эту мысль, она нам еще, возможно, встретится. Вычислять приближен-*

*но квадратные корни? Да легко! Решать в уме квадратные уравнения – дайте два. А вот до числа 0 не додумались ни египтяне, ни вавилоняне, ни позже древние греки, ни в средневековых арабских странах, где математика была на очень высоком уровне. Ноль в математике возник немногим ранее комплексных чисел! */*

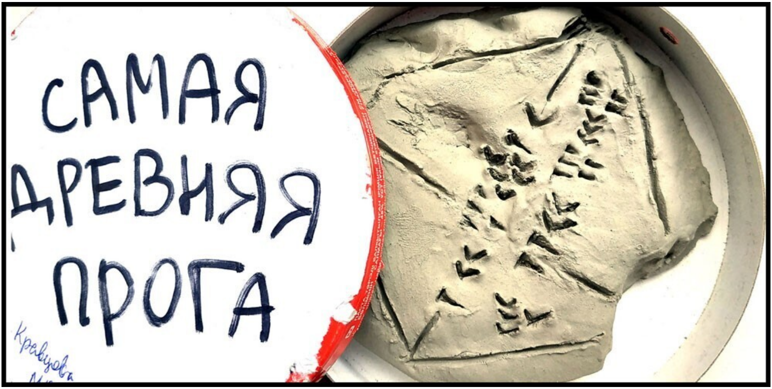


Рисунок 2.5: Реплика глиняной вавилонянской дощечки, выполнена студенткой Кравцовой Настей, слушавшей у меня курс «История математики в контексте истории культур»

Вавилоняне не делили числа. Когда надо было выполнить действие , они искали обратное к b и умножали его на a. Таблицы обратных чисел и таблицы умножения – доступны. Когда число не делилось нацело, пользовались его приближенными значениями. Например, это точное значение (здесь я в скобках записала одну вавилонянскую

60-ричную "цифру"). А это приближенное значение, но вполне хорошее приближение (, а . Погрешность менее 1%).

Что еще делали, кроме четырех основных арифметических операций? У вавилонян была таблица квадратных корней, таблица кубических корней, и (внезапно!) таблица корней уравнения $x^3+x=a$. И всякие другие таблицы. Таблицы они вообще очень любили.

Но самое интересное: у вавилонян явно появились первые алгоритмы. Например, алгоритм вычисления корня из любого числа.

Предположим, нам надо вычислить . Если первое приближение корня мы взяли a_1, то (теоретически, если мы попали в цель) должно быть равно a_1. На деле, эти числа разные (одно больше, другое меньше, чем). И мы берем два числа a_1 и и ищем между ними среднее арифметическое. Это второе приближение a_2. Если оно опять не идеальное (т.е. разница между a_2 и велика), можно также найти третье приближение и т.д.

Ясно, что где-то от 1 до 2, возьмем первое приближение . Тогда . И второе приближение числа Что уже очень близко к реальному значению . Третье приближение, полученное таким алгоритмом отличается от реального значения в 6 знаке после запятой! Отличный алгоритм.

Существовал у вавилонян и алгоритм для решения квадратных уравнений (в целом повторяющий известную нам формулу для их вычисления).

А что с геометрией? Геометрия у вавилонян – целиком прикладная алгебра. Иногда задачи (вроде бы геометрические) не носили никакого смысла. В них складывали площадь с периметром, диагональ с объемом и т.д.

Никаких доказательств или построений не было. Только приближенные вычисления. Однако же приближения были с высокой точностью. Поэтому несмотря на то, что правильных формул вавилоняне не знали, здания они строили крепкие (в том числе и знаменитые зиккураты, представляющие собой несколько усеченных пирамид, взгроможденных одна на другую).

Площадь круга считали как $3r^2$, длину окружности как $6r$ (т.е. считали $\pi=3$).

Объемы призмы, цилиндра вычисляли умножая площадь основания на высоту (правильная формула). А вот формулу для вычисления, например, объема усеченной пирамиды использовали неправильную (полусумма площадей оснований на высоту).

Есть свидетельства того, что вавилоняне знали тот факт, что численно сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы (т.е. теорему Пифагора). Но это не точно.

Итак, никаких доказательств в те древние времена еще не было. Никаких задач на построение тоже не было и в помине. Вавилоняне и египтяне занимались математикой практически параллельно, нет никаких свидетельств, что в те эпохи они каким-либо образом обменивались знаниями (обмен знаний начался позже, в эпоху господства Древней Греции). Доказательства существования вавилонянской математики несколько старше (от 2,5 тысяч лет до нашей эры), египетской чуть моложе (от 2 тысяч лет до н.э.). В решении разного рода вычислительных задач вавилоняне были куда круче египтян, но тем надо отдать должное: они придумали такую странную систему вычислений, что хоть стой, хоть падай. Однако, в геометрии точнее были египтяне.

Какие книги можно еще почитать.

К главе 2 про Древний Египет и Месопотамию.

[7]

Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. – М.: Гос.изд-во физ.-мат.лит-ры, 1969.

/**Самая классная книга по истории математики античного периода. Сам автор – математик. В книге много математических подробностей. Как раз очень подходящая книга для всех, кому не хватает математических подробностей у меня.**/

[8]

В. Прасолов, История математики. Часть 1. – М.: МЦНМО, 2018.

/**Очень современная книга, которая пишется до сих пор. Это настоящий учебник, но Виктор Васильевич в принципе не умеет писать плохо и скучно. Вышла только первая часть (по-моему), но вообще у автора планов громадье, и книга публикуется в сети по мере ее написания.** */

[9]

О. Нейгебауэр, Точные науки в древности. – М., Наука, 1968.

/**Хорошая книга, но намного более устаревшая, чем Ван дер Варден. Мне пришлось ее прочитать, когда я в свое время готовилась к курсу лекций, но, по-моему, [7] хватает.**/

[10]

под ред. А. П. Юшкевича, «История математики с древнейших времен до начала XIX столетия» в 3 томах, т.1. –

М.:Наука, 1970.

/**Учебник по истории математики. В нем про есть про все подряд, но и про Древний Египет и Междуречье тоже.**/

Лекция 3.

Древняя Греция
Глава, в которой математика, наконец, появляется.

Рисунок 3.1: Фреска "Афинская Школа" Рафаэля Санти. Ватикан.

От математиков Египта и Междуречья до нас дошли только примеры решенных задач. В Древней Греции, наконец, мы видим появление математической науки. В чем разница? В математике появляются доказательства. Пока в математике нет доказательств, наукой она не считалась. Ремеслом, занятием, вспомогательным инструментом – да, может быть, но не наукой. Этот важнейший перелом, скачок на новый уровень, когда количество накопленных математических знаний (зачастую противоречивых) переходит в качество, случился приблизительно на рубеже VI и V веков до нашей эры.

3.1

Фалес. Начало.

Рисунок 3.2: Фалес. 624–546 гг. до н.э.

Кроме того, надо обязательно отметить и такой факт. В Египте и Месопотамии математика развивалась крайне медленно. Годами, да что там годами, столетиями, в математике ничего не происходило.

Чтобы изобрести цифру 0 (даже еще не число, а только лишь цифру обозначающую пропущенный разряд) у древних вавилонян ушло более тысячи лет! Свитки переписывались без изменений. А ведь это были учебники. И новые писцы учились по учебникам 1000-летней давности.

*/*Сейчас в высших учебных заведениях России есть стандарт. Все учебники гуманитарных дисциплин должны быть не старше 5 лет. Вся учебная база естественно-научных дисциплин – не старше 10. Нельзя учиться по старым изданиям задачника Демидовича, нужно обязательно брать новые. В связи с этим в университете, где я работала, был забавный казус на факультете теологии. Весь "Ветхий завет" в библиотеке устарел! И включать его в учебную программу было нельзя.*

Обратите внимание, что как нельзя использовать учебники старые, так нельзя использовать и слишком новые. Используемый учебник обязательно уже должен быть выпущен и одобрен УМО. Конечно же, я при написании этой книги, подобными ограничениями не руководствовалась – и поэтому с легкостью вам рекомендую к прочтению еще не дописанную и не выпущенную книжку [64]./*

А в Греции на протяжении примерно 300 лет с момента возникновения математики развитие ее идет взрывообразно. Очень быстро. В 6 веке до н.э. она появляется. А в 3 веке до н.э. уже Евклид пишет свои "Начала" – библию всех математиков, венец творения древних греков. В которой собрано безумное количество задач, теорем, алгоритмов по самым разным темам (мы на «Начала» посмотрим более пристально в главе 6). В этих самых «Началах» многие задачки очень нетривиальные! Математика от несуществования до очень высокого уровня, с доказательствами достаточной степени строгости, со многими приемами и методами, используемыми до сих пор, развилась в Древней Греции за 300 лет.

Как говорил про это Платон: "Все, что эллины переняли у варваров, они довели до совершенства".

Почему так? Почему именно тогда? В 6 веке до н.э. в греческих городах-государствах происходит смена власти с рабовладельческой аристократии на рабовладельческую же, но демократию. Все граждане государства могли принимать участие в управлении государством (ясное дело, никаких иноземцев, женщин и рабов – они гражданами не были; но право голоса появилось у всех граждан). Главный принцип демократии: каждый должен отстаивать, аргументировать, доказывать свою точку зрения. Никакие суждения без доказательства не могли пройти сквозь голосование. Греки учатся критическому мышлению, и помогает им в этом демократия. А как апофеоз критического мышления возникает математика.

Отцом математики считается Фалес Милетский. Фалес Милетский – древнегреческий мыслитель. Как был в Античности список Семи величайших Чудес Света, так был и список Семи Мудрецов. Хотя этот список и считался эталонным, каждый раз он был немножко разный, в зависимости от того, кто его озвучивал. Но в любой реинкарнации такого списка всегда был Фалес. Причем, всегда на первом месте!

Почему Фалес считается отцом математики? Считается, что Фалес первый применил в математике доказательства. Откуда это известно? В V веке нашей эры великий математик Прокл Диадох сочинил очень известный «Комментарий к первой книге "Начал" Евклида». Случилось это примерно 1200 лет спустя после того, как жил Фалес. В этом комментарии написано, что за 900 лет до Прокла (т.е. все равно не при жизни Фалеса) ученик Аристотеля Евдем письменно утверждал, что Фалес доказал следующие факты:

Первый доказал, что диаметр делит круг на равные части.

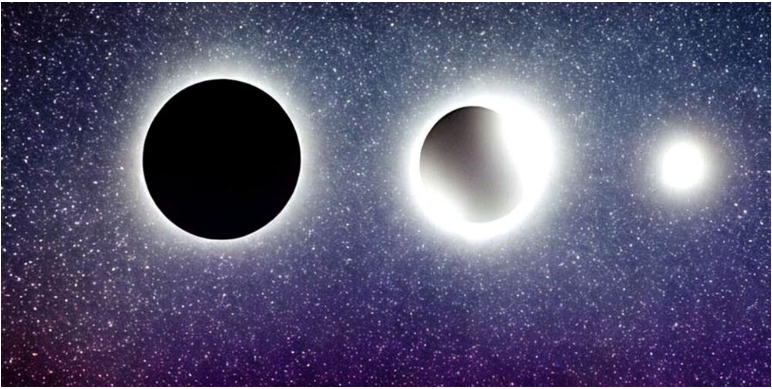
Доказал равенство углов при основании равнобедренного треугольника.

Равенство треугольников по стороне и двум углам.

Текст Евдема до нас не дошел, и сами доказательства до нас не дошли (мы не имеем никакого понятия о том, какие они были), но раз так утверждается в письменном источнике Проклом (который, предположительно, видел-таки письменный источник, написанный Евдемом, у которого тоже были какие-то основания для подобного заявления) – то вот считается вот так.

Не надо воспринимать историю математики как математику. Тут почти не бывает (и в определенной степени не может быть) строгих доказательств исторических фактов.

/**По поводу исторических доказательств в истории математики сохранился также еще один анекдот. Андрей Николаевич Колмогоров, один из великих математиков 20 века, сначала хотел быть историком. И как-то раз, выступая на научном семинаре сделал доклад, полностью обосновав и доказав свою точку зрения. Руководитель семинара Колмогорова очень хвалил, но сказал, что для достоверности каждый исторический факт должен быть подтвержден несколькими разными доказательствами. Так и закончилась карьера Колмогорова-историка: он решил уйти в науку, где для доказательства истинности одного доказательства достаточно!**/



Фалес был великим мыслителем, и прославился не только математическими открытиями. Кроме вышеперечисленных фактов он доказал, что вертикальные углы равны и в каком-то виде знаменитую теорему Фалеса – скорее всего только прямую; первый описал круг вокруг прямоугольного треугольника и скорее всего, первый же доказал, что угол, опирающийся на диаметр – прямой.

Кроме математических результатов, Фалес известен также своими астрономическими открытиями. Наиболее яркое из них – он предсказал солнечное затмение в 585 году до н.э.; указал морякам, что ориентироваться надо по Малой Медведице, как делали это вавилоняне, а не по Большой (как вслед за египтянами было принято у греков). А кроме того, Фалес был удачливым торговцем, торгуя оливковым маслом, он сколотил состояние.

В путешествиях Фалес познакомился как с египетской наукой (которая, кстати, была довольно известна в Древней Греции), так и с вавилонянской (вот с преемственностью от вавилонян у греков было хуже – они почему-то очень точечно получили от них знания). От одних он знал одну форумлу площади круга , от других – другую $3r^2$. Так где же истина и кто же прав? Как отличить правильные знания от приближенных и ошибочных? С помощью логики и доказательств. Именно поэтому Фалес передоказывает "азбучные истины", факты и так всем хорошо известные (например, то, что диаметр делит круг на две равные части).

Вот так вот появляется математика. И все это, конечно, хорошо и замечательно. Но. Но Фалес – ученый и торговец. Он доказывает теоремы и торгует оливковым маслом. На самом деле, при всем уважении, но его труды никак не могли способствовать тому, что математика в Древней Греции мало того, что взрывообразно развивается, но еще и становится царицей наук и практически возводится в ранг религии. А вот за это все ответственен Пифагор.

3.2

Самосский тоннель

Тут мне бы очень хотелось упомянуть, что в прикладную математику древние греки тоже умели.

В середине 6 века до н.э. (приблизительно в 530 году до н.э.) Евпалин построил водопровод на острове Самос. Примечательность состоит в том, что водопровод строили сквозь гору Кастро, копая одновременно с двух сторон. А самое примечательное в точности наведения: благодаря ловким геометрическим рассчетам, проведенным Евпалином, расхождение по горизонтали (в точке схода двух кусков тоннеля) не более метра. Расхождение по вертикали и вовсе 4 сантиметра! Длина тоннеля при этом больше километра.

Когда за 100 лет до этого подобный тоннель строили возле Иерусалима, он получился зигзагообразным и длина тоннеля в два раза превышает расстояние между его концами.

С античных времен этот тоннель был забыт. Но в трудах Геродота был составлен список "Чудес света". Это самый первый в мире (известный сегодня) список чудес света, Геродот туда включил всего три объекта, среди которых этот самый Самосский тоннель. Прочитав о тоннеле в трудах Геродота, тоннель принялись искать – и нашли, раскопали в 1882 году. С тех пор это туристическая достопримечательность.

Лекция 4

.

Пифагор

"Пифагор… является в интеллектуальном отношении одним из наиболее значительных людей, когда-либо живших на земле… я не знаю другого человека, который был бы столь же влиятельным в области мышления, как Пифагор." Бертран Рассел.

Пифагор – фигура полумифическая, полулегендарная. Конечно, мы уже сто раз говорили, что началось "историческое время" и есть куча письменных источников о Пифагоре, написанных его современниками и недавними потомками. Позже мы будем говорить про Платона – все (!) его труды сохранились. Поэтому мы можем многое узнать о его взглядах, об укладе его жизни и т.д. А вот жизнь Пифагора… тут сложно отделить легенды от достоверной истины. Во-первых, сам Пифагор никогда ничего не писал. Писали его ученики (но их записи о Пифагоре до нас не дошли). Первые исследования жизни Пифагора появляются примерно через 200 лет после его смерти.

А подробнее всего его жизнь и воззрения описали неопифагорейцы, 700-800 лет спустя. Неопифагорейцы хотели на основе учений Пифагора и Платона создать новую религию, которая должна была противостоять набирающему обороты христианству. Но в работах пифагорейцев о жизни Пифагора рассказано много чудес. Например, о нем писалось, что дикие животные и хищные птицы сами приближались к нему и позволяли себя гладить. Что однажды Пифагор сказал реке Сирис: "Здравствуй, Сирис!". И все слышали, как река Пифагору ответила: "Здравствуй, Пифагор!" И прочие рассказы, подчеркивающие исключительность Пифагора, избранность. В чем-то напоминающие рассказы о жизни Христа.

/**Надо написать рассказ (а то и роман. Или цикл романов) в жанре альтернативной истории, где в битве за основную европейскую религию победило не христианство, подарившее Европе Темные века, а неопифагоризм.**/

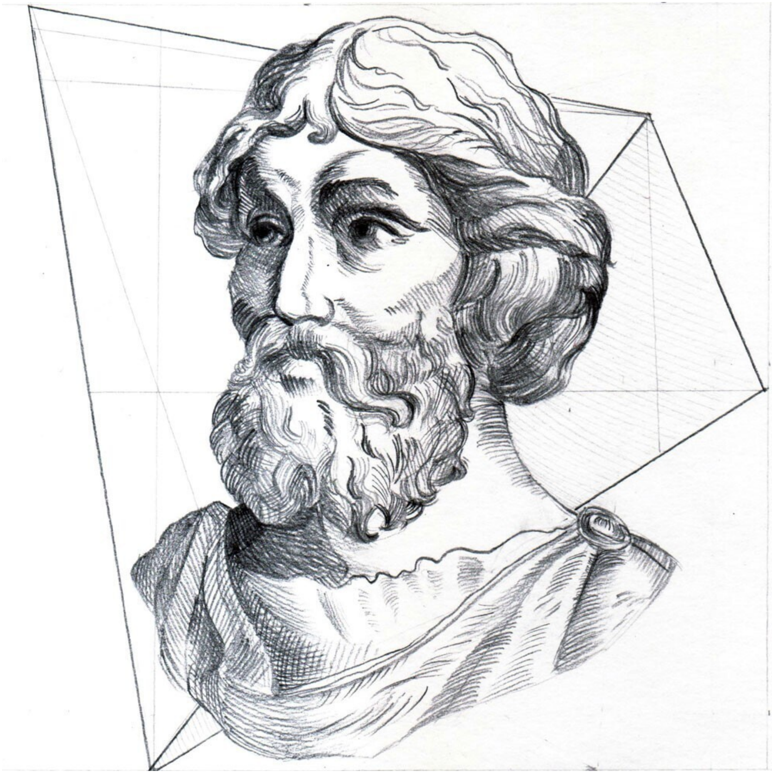


Рисунок 4.1: Пифагор. ок.570 – ок.490 гг. до н.э.

Поэтому надо понимать, что про Пифагора – это все из области сказок и легенд.

Всем известно, что рождение Пифагора предсказала пифия в Дельфах, сказав, что он принесет столько пользы людям, как никто иной. Именно поэтому его родители так и назвали ("предсказанный пифией").

Внешность Пифагора описывали так: красивый высокий мужчина в восточном тюрбане.

В детстве Пифагор жил на острове Самос, но в молодости начал много путешествовать и встречаться с мудрецами того времени. В юном возрасте поехал в Египет, перенимать тамошнюю премудрость. Греки вообще, как уже упоминалось, считали Египет колыбелью науки. Чтобы в Египте ему писцы рассказали секретную науку, самосский тиран Поликрат дал Пифагору личную рекомендацию к фараону Амасису. Из Египта Пифагор попал в плен к персам. Попав в плен, Пифагор так шикарно себя зарекомендовал, что ему разрешили изучать математику и астрономию у местных жрецов. В итоге за его великий и непревзойденный ум, персы его освободили из плена (по другой версии, знатный грек увидел его в плену и выкупил; по третьей версии, его вообще никто в плен не брал, а он там был просто в обычной тур.поездке).

Все путешествия Пифагора заняли лет 20. По возвращении на свой родной Самос он довольно быстро поссорился с вышеупомянутым тираном Поликратом, и был вынужден эмигрировать в другой греческий город Кротон (который находится на территории современной Италии, на берегу Ионического моря). В Кротоне Пифагор прожил 40 лет. И именно там основал свою Школу.

С Поликратом он поссорился по вполне понятной причине. Он начал активно заниматься политикой. И выступал он за аристократию, однако же не за аристократию крови, а за аристократию интеллектуальную. Он считал, что люди умные и образованные должны править остальными, должны быть высшей кастой. Конечно же, Поликрату, потомственному тирану, это не могло понравиться. Впрочем, именно за эту же его активную политическую позицию 40 лет спустя разгромили его Школу в Кротоне, откуда ему тоже срочно пришлось убегать.

Что Пифагору не нравилось в древней восточной математике? Во-первых, Не было доказательств. Формулы были, и почему-то они соответствовали практике. Но почему? Никого это не волновало. В некотором смысле, можно считать, что прикладная математика уже была, а чистой еще не было. Во-вторых, поэтому не было никакой мотивации изучать, а тем более "двигать" математику. В-третьих, не было никакой системы математического образования. Хочешь изучать математику – иди в жрецы. Поэтому Пифагор решил основать свою Школу.

Итак, основывая свою Школу, Пифагор тем самым решает третью проблему – проблему отсутствия математического образования. Хотя надо сказать, что на деле в школе изучалась далеко не одна только математика (а, например, еще и "основы праведной жизни"), но даже в математику включались такие 4 основные раздела: учение о фигурах и измерениях (геометрия), учение о числах (арифметика), теория музыки (гармония) и астрономия (астрология).

Рисунок 4.2: Федор Бронников. Гимн пифагорейцев восходящему солнцу

А зачем же изучать математику (т.е. какая же у нас мотивация)? Пифагор во многом, не просто учитель – он пророк. Если Будда (живший, кстати, примерно в одно с ним время) считал, что человек входит в нирвану через внутренний покой и ничего неделание, то Пифагор призывал к чисто интеллектуальному деянию, сопряженному с интеллектуальным экстазом. А самый высший кайф – думать не о мире реальном, а о мире идеальном. Думать о том, чего в мире нет, думать так, чтобы испытывать восторг от работы мысли. / **Всем же нам, математикам, известен восторг на грани с* *экстазом от решения трудной задачи, доказательства новой теоремы! Так вот, это и есть цель жизни, смысл жизни по Пифагору.**/ До Пифагора математика была прикладной наукой, ориентированной на решение жизненных задач. После стала наукой об идеальных сущностях, не существующих в реальности.

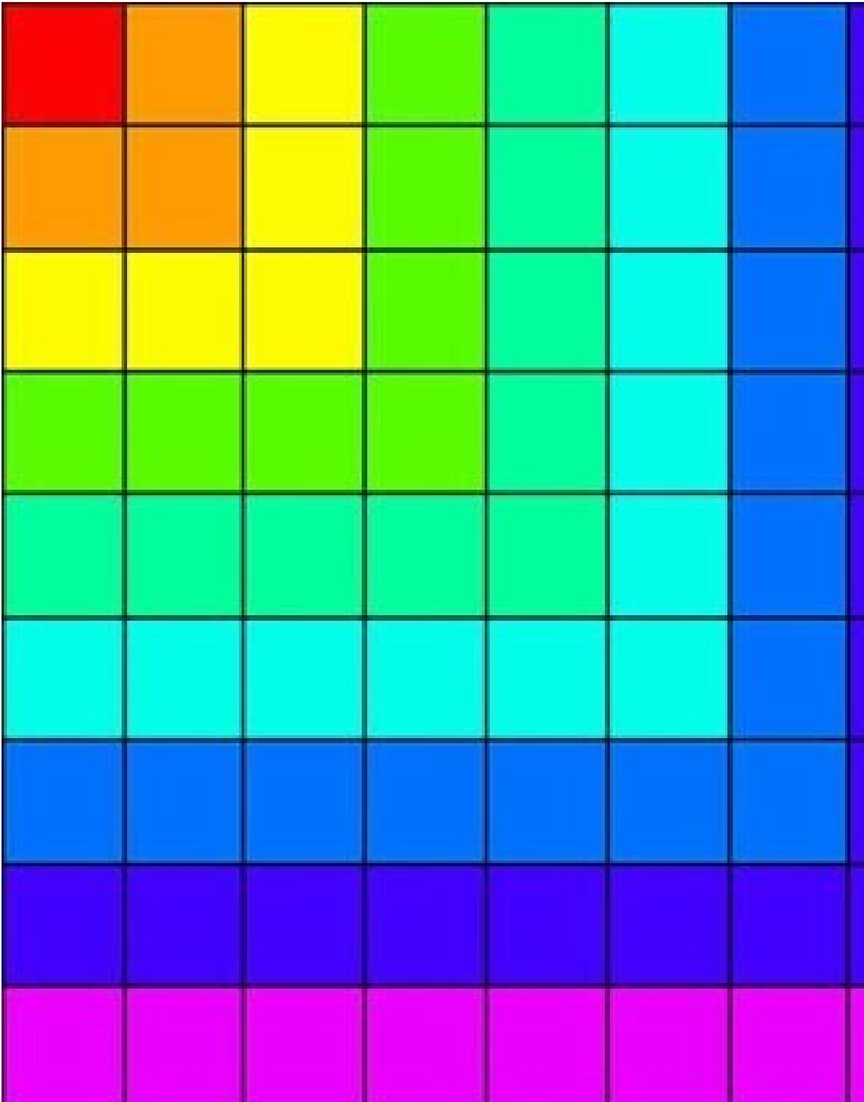
Конечно, именно Фалес изобрел первым идею, что все нуждается в доказательстве. Но именно Пифагор эту идею возвел в ранг религии и распространил ее среди своих последователей. Без Пифагора математика могла бы так и умереть в зародыше.

Смысл математики как раз в том, чтобы дать человеку (пусть и на время) свободу от реального мира, вывести его из бесконечной цепи смертей и рождений (как и все в те времена, Пифагор верил в переселение душ), сделать человека счастливым.

Рисунок 4.3: Питер Пауль Рубенс. Пифагор проповедует вегетарианство.

Таким образом, Пифагор в первую очередь не ученый, нет, он пророк. Цель его жизни не в том, чтобы познать математику. Цель его жизни в том, чтобы научить людей быть счастливыми (правда, посредством математики).

К сожалению, нам совсем ничего не известно о том, что доказал сам Пифагор. Самое известное математическое открытие, связанное с его именем, теорема Пифагора, скорее всего, была ему известна с доказательством только в случае равнобедренного треугольника. (Хотя формулировка точно была известна в общем). Сама теорема Пифагора была известна в Древнем Китае и Древней Индии намного раньше, чем жил Пифагор. Но от них Пифагор узнать эту теорему не мог (с ними научного общения в те времена не было ни в каком виде). С другой стороны, все ученики школы Пифагора считали своим долгом все свои математические



зультаты подписывать именем Пифагора, хотя они тоже к нему никакого отношения не имеют.

Однако, в пифагорейской школе действительно много математических открытий и математических знаний. Например, пифагорейцы умели считать сумму начала натурального ряда и сумму первых нечетных чисел . Знали формулы сокращенного умножения. Что характерно, все арифметические формулы они снабжали геометрическим доказательством.

Число, являющееся суммой всех своих делителей (кроме него самого, конечно), пифагорейцы называли совершенными. Например, 6=1+2+3, 28=1+2+4+7+14. В «Началах» Евклида утверждается, что еще пифагорейцы доказали, что если $1+2+4+\ldots+2^n = p$, где p – простое число, то 2^nр – совершенное число. (И только в 18 веке Эйлер доказал, что других совершенных чисел не бывает! То есть, пифагорейцы уже знали (описали) все совершенные числа).

Похоже, что именно в школе Пифагора совершили открытие иррациональных чисел (а именно, доказали, что число иррациональное).

Активно пифагорейцы изучали и музыку. Например, если уменьшить длину струны или флейты вдвое, то тон ее повысится на одну октаву. Если уменьшить в и в раза, то этому будут соответствовать интервалы квинта и кварта. Вообще, пифагорейцы полагали, что музыку можно просчитать. Что при таких-то параметрах будет звучать благозвучно, а при других нет.

Короче говоря, хотя совершенно неизвестно, что же сделал в математике Пифагор, главное – он сделал математику мейнстримом, хайпом, даже религией. Благодаря Пифагору, все образованные греки мечтали заниматься математикой, а все состоятельные греки мечтали, чтобы хотя бы их дети познали эту прекрасную науку.

После разгрома Школы, Пифагор скрылся. Опять же, достоверно ничего не известно, некоторые утверждают, что он сгорел в пожаре вместе со школой. Другие – что удалился на покой и счастливо прожил еще лет 10-15 в кругу семьи. Но пифагорейцы после разгрома точно расселились по всему греческому миру. И стали нести учение Пифагора и веру в математику повсюду.

Лекция 5.

Платон

Вообще говоря, Платон-то математиком не был. Любой экскурс в историю математики мог бы прекрасно обойтись без Платона. Почему же в этой книжке, такой короткой, без Платона-таки не обошлось?

Платон – в философском плане последователь Пифагора с одной стороны. А с другой стороны, он идеи Пифагора во многом завершил, оформил, и именно четкий след Платона прослеживается позже в том, что говорили Декарт, Спиноза и многие другие философы; да и вообще во всей истории объективного идеализма Платон нехило так наследил, раскидав то тут, то там отсылки в математику.

/**Когда я училась в универе, наш препод философии рассказывал нам, что в зависимости от ответа на главный вопрос философии (что первично, материя или идея?) все мыслители всех времен всегда делились на две большие категории. Материалисты и идеалисты (а идеалисты в свою очередь на объективных и субъективных). Дальше он нам доказывал, и очень убедительно (с его точки зрения, разумеется, мы же математики, для нас слова "убедительно" и "философ" не могут стоять в одном утвердительном предложении), что материализм – это правильно и нормально;*

а идеалисты, которые субъективные – они просто сумасшедшие, а те, которые объективные – религиозные фанатики (читай: тоже не очень-то здоровы психически), потому что объективный идеализм ни что иное как религия. Ну, так вот. Математика (с некоторой точки зрения) – это типичный пример объективного идеализма. (И это очень хорошо показано в философии Платона). В математике идея всегда идет вперед ее материального воплощения. Поэтому с философской точки зрения иначе как религией математику назвать вообще никак нельзя.

Ну, а мы, математики, все сплошь как один получаемся религиозные фанатики. */

Рисунок 5.1: Платон. примерно 428 – примерно 348 гг. до н.э.

Но основа моего рассказа – не история математики, как таковая, а скорее попытка проследить, повлияла ли математика на общечеловеческую культуру и историю. И с точки зрения того, как же математика повлияла на общечеловескую (хотя бы общеевропейскую) культуру в целом, на философию, на человеческое мышление, разговор никак не может обойти стороной такую глыбу мысли, как Платон. На фреске Рафаэля "Философия" (см. рисунок 3.1 на стр.33) Платон – центральная фигура (что-то объясняющий своему спутнику человек в красном балахоне в самом центре).

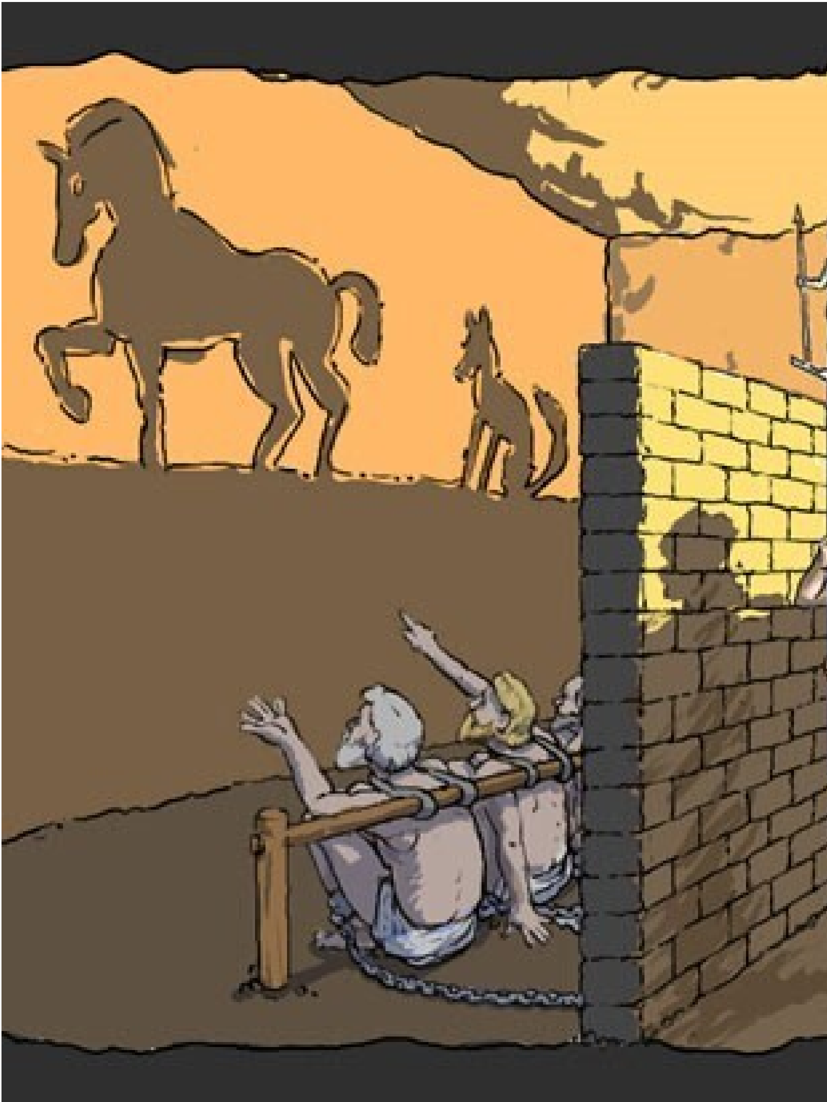
Платон родился примерно 70 лет спустя после смерти Пифагора. Пифагор еще не был нереальной легендой, а был довольно близкой историей (как для моих студентов, например, Фихтенгольц, а для меня – ну, предположим, Марков, который изобрел "цепи Маркова" – главный принцип, на котором сейчас работают нейросети и искусственные интеллекты). Пифагорейцы были очень активны и рассеяны по всей Греции. Уезжать в путешествия для получения образования Платон вовсе не хотел, он хотел получить образование в колыбели культуры – в Афинах, в школе Сократа. Но увы и ах, школу Сократа тоже закрыли, Сократ умер, и Платон, чтобы продолжить свое образование, вынужден был путешествовать. Ездил он и в Египет по следам Пифагора, и в Кротон (где была пифагорейская школа), и в африканскую часть Древней Греции, в Сиракузы (где позже появится Архимед). Именно в этом путешествии Платон и научился математике. Однако же, кроме математики, узнал много чего еще. В конце-концов, вернулся в Афины, где основал первое в истории высшее заведение – Академию Платона. Которая просуществовала в итоге больше 900 лет! (закрыта лишь в 529 году нашей эры).

Над входом в Академию Платона висел слоган «Не знающий геометрию – не войдет!» Более того, во все времена существования Академии, этого слогана, безусловно придерживались. /**Ах, как было бы хорошо, если бы подобный слоган был руководством к действию в современных вузах. Ну, или хотя бы на математических факультетах!* */

Когда мы говорили о Пифагоре, мы обсудили, что математика родилась в учении Пифагора из философии и религии. Теперь, при Платоне, 100 лет спустя, работает много профессиональных математиков (людей, у которых основное занятие в жизни – доказывание теорем). Многие из них – вовсе не пифагорейцы, просто им нравится математика. И вот теперь, когда математика уже хорошо развита, математика начинает влиять на философию, на мировоззрение.

Для лучшего понимания философских идей Платона, никак невозможно обойтись без его учения о идеях. Лучше всего, конечно же, читать "Миф о Пещере" в Диалогах Платона [19], но я кратенько перескажу.

Представим себе людей, которые прикованы в темной пещере, и смотрят на освещенную стену. Они не могут шевелиться и видят только стену. За их спиной проносят реальные предметы, которые отбрасыва-



стену тени. И люди способны увидеть и познать только лишь эти тени, реальные предметы – вне поля их зрения. Очевидно, если человек выйдет из Пещеры на яркий свет, ему будет плохо и дискомфортно. Но если он пересилит себя, и останется на свету, постепенно он поймет, что ему хорошо, а плохо было раньше, прикованным в пещере, во тьме. И человек узнает, что знал не настоящие вещи, а лишь их тени. Но если он вернется в пещеру и начнет рассказывать, что тени – всего лишь тени, ему не поверят. И на свет с ним идти, возможно, не захочет никто.

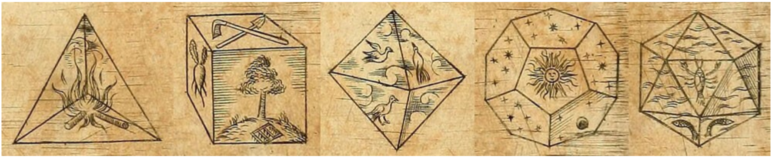
Ну, так вот. Платон считал, что мы все, подобно тем узникам в пещере. А настоящий, большой мир – это мир идей. Идея предмета – реальная, настоящая, первичная. Есть много животных, которых мы можем назвать Кошка. Но это ненастоящие кошки, это лишь тени одной, настоящей идеальной кошки (кошки-идеи) из мира идей. (Так на примере котиков объясняет Бертран Рассел философию Платона).

Это очень математичная идея. Мы можем соорудить в жизни куб? Можем, конечно. Но углы у него будут не четко $\frac{\pi}{2}$, длины сторон чуть-чуть, да отличаться, да и в целом будут немного не ребра, а закругления на стыке граней. Этот куб не будет идеальным кубом. Но есть куб-идея. Идеальный куб. И математики никогда не исследуют материальный куб.

Они всегда исследуют куб-идею (у которого все углы ровно $\frac{\pi}{2}$, ребра все с бесконечной точностью равны и т.д.) А исследования этого идеального куба приводят нас к выводам о его бледных подобиях в окружающем нас мире – кубах материальных.

По мнению Платона, после смерти души людей попадают как раз в Мир Идей. И чьим же душам лучше всего? Душам Мудрецов. Эталон истинного Мудреца обладает у Платона определенными качествами: бесконечная любовь к размышлениям, благожелательность, равнодушие к чувственным удовольствиям, внутреннее спокойствие и обязательное отсутствие страха смерти (ведь после смерти ты попадаешь в лучший мир – из Пещеры к Свету). Близко к идеям христиан, только содержит дополнительный интеллектуальный элемент (который не нужен христианам в их религии).

Платон считает, что любое знание – это припоминание. Душа человека вне кратких мигов своей земной жизни (как после нее, так и до нее – душа вечна-бесконечна) живет в Мире Идей. Таким образом, душа при рождении знает все идеи, только забывает их от шока, попадая в наш мир. Поэтому Платон относится к знанию как к припоминанию. (По этому поводу можно почитать его диалог "Менон" [19], где он это наглядно показывает).



В математике имя Платона присвоено одному примечательному объекту (точнее будет сказать, набору объектов) – Платоновым телам. Платоновы тела – это правильные многогранники. Вот правильных многоугольников бывает бесконечно много. Правильный треугольник (он же равносторонний), правильный четырехугольник (он же квадрат), правильный пятиугольник и далее любой правильный *n*–угольник (все они существуют). А вот правильных многогранников (т.е. таких объемных тел, у которых все ребра равны, все грани равны, все углы равны (как плоские, так и двугранные) – ну, короче, всех таких из себя правильных) таких многогранников существует всего-то пять штук!

Почему они названы именем Платона, не очень понятно. На самом деле, три из пяти правильных тел были точно известны еще Пифагору. А оставшиеся два открыл современник Платона математик Теэтет (и он же первый доказал, что их ровно пять, и больше не бывает). Теэтет открыл и доказал, а назвали именем Платона. Возможно потому, что Платон написал о них в своем диалоге "о природе" (а отсюда уже знание о них распространилось; художественную литературу все же читают намного чаще, чем специальную математическую). Может, это не честно, но уж как есть. Это называется "исторически сложилось".

Теэтет вообще был классный математик. Его еще называют создателем геометрической теории чисел. Например, он придумал, как геометрически показывать Алгоритм Евклида. Или доказал, что если квадратный корень (из целого числа) – не целое число, то и не рациональное тоже. (Это очень круто. Если вы знаете эту теорему Теэтета и, например, умеете доказывать, что , но при этом – вы доказали, что 101 – иррациональное число). Похоже, что и основную теорему арифметики (про то, что каждое число раскладывается в произведение простых, причем, однозначно), первым доказал тоже Теэтет! Вот такой был замечательный математик, а его имя почти кануло в летах. /* *Вот признайтесь, правда ведь, что вы про Платона раньше знали, но думали, что он математик, а про Теэтета – даже не слышали? Хотя, возможно, вы сами математик, тогда вам простительно!* */

Представьте, насколько современную литературу писал для своего времени Платон? Открыли теорему о платоновых телах – он сразу их включил в свои "Диалоги". Причем, Платон всегда включал в свои диалоги математику очень по существу и со знанием дела. Однако же, сам математиком не был. Все-таки, он считал математику – путем к мудрости, но не ее вершиной. Частным случаем. Особенно ему не нравилось неистребимое желание математиков делить программу на подпрограммы (то есть, тьфу, великую, большую, красивую задачу на какие-то мелкие ничтожные подзадачи). Вершиной же всего-всего Платон считал еще более оторванные от реальности размышления – философию.

Лекция 6

.

Евклид. Начала.

Рисунок 6.1: Страница из первого печатного издания «Начал», 1482 год

Венцом древнегреческой математики считается книга, написанная Евклидом, под названием «Начала». Сейчас бы такую книгу назвали «Начала математики», «Начала геометрии», ну начала чего-то ведь! Но Евклид был скромным, и уточнять, Начала чего, не стал.

По количеству переизданий и выпущенных за всю историю копий, Начала Евклида не имеют себе равных среди светских (нерелигиозных) книг. Годом изобретения книгопечатания (в Европе) считается 1445 год и первым делом была напечатана, конечно, Библия (потом Псалмы и т.д.). Но первое издание «Начал» не заставило себя долго ждать, и вышло в 1482 году (это очень быстро!). Кстати сказать, до Библии массово печатались только две вещи: религиозные гравюры и игральные карты))))

Так вот, тут есть некий исторический парадокс. «Начала» Евклида сохранились идеально! (они написаны примерно в 300 году до н.э. и до их первого печатного издания переписывались и переписывались от руки. Гуляли по странам, континентам и частям света, чтобы вновь вернуться в Европу – но текст исходных «Начал» при этом сохранился! (Плюс иногда добавлены ценные комментарии, но которые сами оформлены именно как комментарии). При том, что про книгу хорошо все известно, никто не знает, когда же жил ее автор, Евклид! И не только "когда", а вообще, про него очень-очень мало что известно. /**Как же хорошо, что с тех пор изобрели интернет! Теперь про всех всем всё известно.**/

Евклид жил в Александрии (территория современного

Египта), и был очень книжным человеком. Малообщительным. Прокл в своем комментарии указывает, что Евклид должен был жить во времена Птолемея I (это египетский царь, а про царей гораздо лучше сохранилось все в истории, чем про ученых). Вот, собственно, это мы и знаем о Евклиде.

Комментарий Прокла, кстати, мы с вами уже упоминали (именно в нем возникает имя Фалеса как отца математики). Кроме того, в своем комментарии Прокл делает краткий экскурс в историю древнегреческой математики с момента возникновения (Фалеса) до момента написания книги.

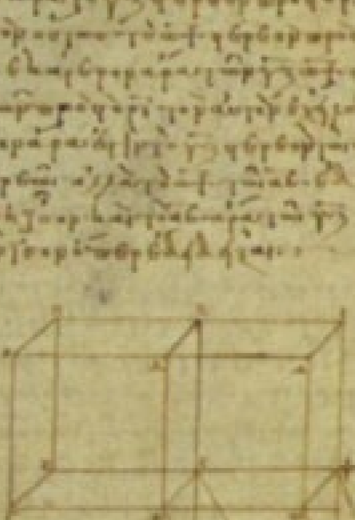
В своих «Началах» Евклид постарался собрать всю известную на тот момент математику. По большей части ему это удалось. В «Началах» 13 книг. Первые 6 – это планиметрия. Затем четыре книги – арифметика и немного алгебра, которые излагаются по большей части на геометрическом языке. Последние три главы – стереометрия.

Если раньше мы уже говорили, что шумеры и египтяне занимались геометрией как прикладной арифметикой, то греки делают все совершенно наоборот. Всю арифметику, алгебру и теорию чисел стараются греки облечь в геометрическую формулировку. Например, как формулируется иррациональность числа ? Всегда только так: "диагональ квадрата несоизмерима с его стороной" (несоизмерима – это и означает, что никак с помощью стороны измерить нельзя. Не находится со стороной ни в какой приличной пропорции).

Вавилоняне ничтоже сумняшеся складывают

площадь квадрата с его периметром. Греки никогда такой вольности не допустят, ведь площадь и периметр – это не числа для них, а разные сущности. Число греки не называют числом не потому, что не знают иррациональных чисел, а потому что в их определении под словом "число" подразумеваются только натуральные числа. Рациональные числа в их терминологии – "отношения (чисел)" (рацио). А иррациональные? Это странные сущности, не являющиеся рациями. Когда вавилоняне не могли найти точное значение, они заменяли его приближением – и на этом все. Греки всегда искали

16



ное значение.

Рисунок 6.2: Страница из рукописного экземпляра "Начал", IX век н.э.

*/*С тех пор у математиков принято именно так. Мы знаем приближенные значения чисел, но мы не отождествляем их с этими числами. Математик скорее откусит себе язык, чем скажет, что "π равно 3.14". Скорее всего, математик не будет уточнять, скажет просто π. Если очень попросите, то скажет, что "π примерно равно*

3.14".

Но самый настоящий математик вам этой информации не выдаст и до последнего на вопрос: "Так чему же равно π?" – даже под страхом смерти будет настаивать на том, что π равно отношению длины окружности к ее диаметру (и конечной или периодической десятичной дробью не выражается)./*

«Начала» практически до конца XIX века считаются образцом логических построений и предельной четкости изложения. Именно по образу и подобию начал строят свои книги Декарт, Ньютон, Спиноза (не только труды математические, но и труды философские), а также практически все математики с тех времен.

Сначала идут определения. Например, определение окружности и круга, тупого, острого, прямого угла и т.д. Потом идут так называемые "Постулаты" (пять знаменитых постулатов Евклида нам позже встретятся в главе «Что такое неевклидовы геометрии?»), аксиомы. Постулаты – это высказывания, которые не нуждаются в доказательствах. Постулируется (допускается), что такие-то и такие-то утверждения верны. И из этих утверждений выводятся разные теоремы. Если мы изменим постулаты, то сможем выводить совершенно другие теоремы (Евклид этого еще не знал, но уже догадывался, перед постулатами он написал: "Допустим, что...."). Аксиомы – это тоже высказывания, не нуждающиеся в доказательствах, но обычно аксиомы не подлежат сомнению. Не подлежат смене. Собственно, слова "аксиома" и "постулат" – синонимы. Но в геометрии ("так исторически сложилось" – смешная фраза, но уж как есть) принято отделять аксиомы и постулаты.

У Евклида к аксиомам отнесены как бы общематематические вещи (например: "равные одному и тому же равны между собой" – это, скорее, относится не к геометрии, а к определению слова "равны"; или "Половины одного и того же равны между собой" – а это тоже, скорее, не аксиома, а определение слова половина. Ну, и т.д.), а к постулатам уже вещи сугубо геометрические: "две любые точки можно соединить прямой", "из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг" и т.д.

У Евклида как излагаются определения, постулаты, так же и теоремы, но и разобрано много задач с решениями. Очень много среди них – задачи на построение чего-либо циркулем (правда, под циркулем Евклид понимал что-то чуть-чуть другое) и линейкой.

*/*Всем, кто хочет почувствовать себя Евклидом, я крайне рекомендую игру, которая называется Euclidea. Очень сложная, но и очень крутая! Задача №2 из Начал – это задача 6.5 из этой игры (возможно, в будущих версиях программы номер задачи изменится, конечно. Задача называется "Окружность заданного радиуса"). Вообще, в игре много задач из Начал.*/*

6.1

А чего же в «Началах» не было?

Все, да не все включил в книгу Евклид. Скажем, задачи на построение циркулем и линейкой он включает, а любые задачи на построение с помощью других инструментов – нет, не включает.

Так в «Начала» Евклида не входят три знаменитые неразрешимые задачи на построение (см.[12]).

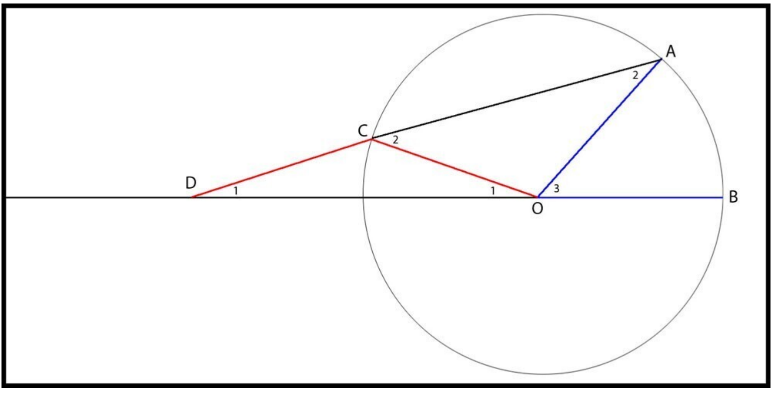


Рисунок 6.3: Решение Архимеда задачи о трисекции угла

методом "вставки".

Задача удвоения куба. Построить отрезок такой, чтобы куб с таким ребром имел вдвое больший объем, чем заданный. (Иначе говоря: дан отрезок, построить другой отрезок, который будет длиннее данного раз).

Задача о квадратуре круга. Построить квадрат, равновеликий заданному кругу (или же наоборот: построить круг, равновеликий заданному квадрату)[6].

Трисекция угла. Разделить угол на три равные части (не на две, как биссектрисой, а на 3).

Математики разных времен пытались эти задачи решать. Естественно, не упомянуто, но подразумевается, что надо решать эти задачи с помощью циркуля и линейки. И с помощью циркуля и линейки у них не получалось. Зато иногда получалось с помощью других инструментов. Архимед, например, кажется, придумал, как с помощью разных инструментов решать все три эти задачи. Правда, Архимед жил позже Евклида (мы до него еще не дошли), но смысл тот же.

Так вот, решения с помощью "чего попало" в стиле пифагореизма было запрещено, считалось читерским, некрасивым. Поэтому Евклид не включил в свой трактат даже самые изящные и красивые из таких решений.

На рис.6.3 мы видим решение Архимеда задачи о трисекции угла методом "вставки". Если вы совсем-совсем неподготовленный читатель, то следующий абзац без потери смысла можно пропустить.

---

[6] То, что эти задачи равнозначны, древние греки прекрасно знали. Если научиться решать одну из них, другую они понимали, как решать.

Угол АОВ – исходный, который надо поделить на три равные части. Произвольным радиусом строим окружность с центром в точке О. Продлеваем прямую АО. Теперь берем линейку, отмечаем на ней отрезок, равный радиусу окружности. И прикладываем эту линейку так, чтобы она проходила через точку А и чтобы отрезок, "зажатый" между окружностью и прямой ОВ был равен радиусу (тому самому, который мы заблаговременно отметили на линейке). В таком случае, полученный угол CDO будет как раз равен трети исходного угла. (Углы, отмеченные 1 равны между собой, т.к. в равнобедренном треугольнике; углы, отмеченные 2 равные между собой и вдвое больше углов 1 (т.к. угол АСО внешний к треугольнику OCD). Ну, и дальше сумма углов в треугольнике равна π и сумма трех углов с вершиной О равна π. Значит, угол, отмеченный 3 втрое больше угла 1. Вот и все.)

Что тут используется? Почти что циркуль и линейка. Но только предлагается на линейке поставить засечку (отмечающую равный радиусу отрезок). Все. Так нельзя! Это не благородно, и недостойно.

Вот такие задачи Евклид так и не включил в свои Начала.

Кстати, древние греки не зря не могли найти решение с помощью циркуля и линейки в середине XIX века было доказано, что с помощью циркуля и линейки решить эти задачи нельзя, как ни исхищряйся.

Лекция 7

.

Архимед

Итак, «Начала» уже написаны. Доказательства почти на том же уровне строгости, как принято в математике сейчас. Геометрия на необычайно высоком уровне. Приложения математика находит в астрономии, музыке, зачатках теории перспективы. Т.е. приложения приняты внутри науки и искусства. "Извлекать выгоду" из науки не принято, недостойно – по соображениям почти религиозным, как мы помним.

Казалось бы, куда уж боле?

И тут на сцене возникает Архимед.

Архимед родился в Сиракузах, жил в Сиракузах, занимался математикой, механикой и астрономией в Сиракузах, а затем умер, защищая Сиракузы, в возрасте 75 лет.

Тут надо сказать, что Сиракузы – город на юге острова Сицилия (ныне это в Италии). В те времена был автономным греческим городом-государством, а вот вся остальная Сицилия уже была поглощена римлянами. Проходило время господства на мировой арене Древней Греции, наступало время господства Древнего Рима. Поэтому всю жизнь Архимеда Сиракузы были очень лакомым кусочком, за который постоянно сражались греки, римляне и карфагеняне. В связи с этим есть информация об Архимеде практически в любых книгах по истории того времени (ведь битвы и баталии в исторической литературе отражены очень хорошо!). Еще Плутарх, живший на рубеже I и II веков нашей эры, и писавший трактаты про историю того времени, обязательно писал об Архимеде.

А кроме того, уцелело довольно много сочинений, работ, чертежей самого Архимеда (и на русском языке есть отличная книжка с этими остатками [17]). Поэтому о том, чем этот невероятно гениальный человек занимался в науке, мы знаем довольно хорошо.

Отец Архимеда был известный в те времена астроном Фидий. И Архимед, таким образом, возможно, первый в истории потомственный ученый. Сейчас бывают целые ученые династии, а уж потомственные ученые – повсеместность /**автор этой книги, ваша покорная слуга, сама из таких: мои родители оба математики. Но в наши времена это не редкость.**/, а вот Архимед был первым.

Рисунок 7.1: Архимед. 287–212 гг. до н.э.

Архимед вел переписку с разными известными учеными разных стран. И, возможно, это первая в истории научная переписка. С тех пор и поныне научная переписка – один из главных движителей науки.

Ученые обязательно общаются между собой, обсуждают доказанное, ставят друг другу задачи и так далее. Кстати, в связи с научной перепиской встает моральный вопрос: как доказать в науке свой приоритет? Сейчас авторы пишут статьи, издают их или в научных журналах или в электронном виде (например, на https://arxiv.org/), и все знают: кто первый встал – того и тапки. То есть, тьфу, чья первая вышла статья, того и изобретение. Еще один путь: выступить на научной конференции или на научном семинаре. Рассказать о своем открытии, заодним рассказать о том, что это открытие – твое. Но в те времена журналов не было. Научные семинары тоже появятся еще только в XVII веке. Как избежать того, что ты расскажешь какую-то теорему коллеге, а он ее потом будет везде рассказывать от своего имени? Можно было написать книгу (подобно Евклиду), но это очень долго.

Архимед писал в своих письмах результаты, но не писал доказательств. Доказательства были в его трудах. А кроме того, Архимед обожал троллить своих адресантов (например, постоянно слал Эратосфену нерешаемые задачи или неправильные теоремы).

7.1

Архимед и анекдоты

А еще, кажется, Архимед – первый ученый, про которого сочиняют анекдоты. Анекдоты про ученых – ныне явление повсеместное (например, крайне рекомендую всем заинтересованным книгу [73]). Но до Архимеда про ученых не сочиняли анекдотов. К ним относились с большим почтением, очень благоговейно. А Архимеда, хоть и уважали, но подсмеивались над его рассеянностью и увлеченностью наукой.

Например, рассказывают, что даже когда он принимал ванну, он не мог оторваться от геометрических чертежей и чертил их буквально на пене в ванной, на расплескавшейся вокруг ванной воде, и вообще на любых поверхностях.

В целом, подобные анекдоты о рассеянности ученых потом рассказывали постоянно. Например, судя по анекдоту, Ньютон както раз вместо яйца сварил по рассеянности свои карманные часы. А Эйнштейн… Впрочем, не буду вам все пересказывать, не зря же я вам книжку отдельную упомянула! Но Архимед был первым.

Ну, а самый известный анекдот, безусловно, про корону царя Гиерона.

Жил-был царь Гиерон. Страна, которой он управлял, была очень мала. А самомнение у него было очень велико. Поэтому он велел создать для него корону, самую большую, самую дорогую, и самую красивую! Выделил Гиерон ювелиру каменьев драгоценных и золота 10 пудов. И через некоторое время получил корону, которая весила ровно столько, сколько нужно. Была самая большая в мире и самая красивая. Но пошел слушок, что ювелир оказался нечист на руку, и использовал для короны не чистое золото, а часть золота заменил серебром того же веса.

Но как же это узнать? Архимед умный, вот пусть Архимед и узнает, – порешил царь.

Архимед долго бился над задачкой. Пилить корону, брать пробы – испортишь! А корона Гиерону очень нравилась, он с ней не хотел расставаться в любом случае. Как же проверить, из чистого она золота, или часть золота заменил-таки прохвост-ювелир на серебро? Думал-думал, ничего в голову не шло. И вот в один день пошел Архимед принимать ванну. А слуги наполнили ванну до самых краев, и когда Архимед залезал, вода выплеснулась на пол.

– А сколько же воды выплеснулось? – подумал Архимед. – Так ровно столько, каков мой объем.

– Эврика! – вскричал Архимед. На греческом это означало "нашел!" – выбежал из ванной и побежал прямо в чем мать родила через все Сиракузы во дворец, рассказывать царю Гиерону, как, не разрушая его корону, узнать, из чистого ли она золота.

И ведь правда, серебро – намного менее тяжелый металл (как бы мы сказали сейчас, плотность серебра меньше). Поэтому серебро того же веса займет больший объем, нежели золото. А объем можно вычислить, погрузив предмет в воду. Так можно узнать, не добавили ли в золото серебра.

А вот что случилось с тем ювелиром, анекдоты умалчивают. Вероятно, это уже не такая забавная история.

7.2

Механические изобретения

Архимед очень стыдился своего занятия механикой и изобретением разных механических приспособлений, но поделать с собой ничего не мог. Ну, нравилось ему это дело! Хотя и было немного стыдно извлекать прибыль из математики, вопреки неписанному уставу древнегреческих математиков. Изобретения свои он считал "забавами геометрии". Так что же изобрел Архимед?

Рисунок 7.2: Т. Спенс. Архимед руководит обороной Сиракуз. 1895г.

Более всего известен Архимед своими военными инженерными разработками. Когда в 212 году до н.э. римляне напали на Сиракузы в очередной попытке захватить этот город, у сиракузян на самом деле не было ни единого шанса на поле боя. Они многократно уступали в численности, в умении, в опыте… Но на помощь пришел Архимед и его приспособления.

Атакующих с суши встретили катапульты и скорпионы (которые изобрел Архимед, и подобного оружия у римлян не было). Причем, совершенно гениально Архимед изобрел бойницы. Уникальное изобретение, которое после смерти Архимеда было в Европе утеряно аж до Позднего Средневековья (а в Сиракузах бойницы встречаются в 3 веке до н.э.) Очевидно, сквозь бойницы метать снаряды при помощи скорпионов куда как удобнее, чем с вершины стен. Поэтому римляне не могли ничем ответить этой смертоносной бомбардировке, не могли ни разрушить как-то машины, ни подстрелить из луков сиракузян, управляющих этими машинами.

А вот на море римлян встречало еще одно изобретение Архимеда – клешня Архимеда (или коготь Архимеда). Это крюк, который захватывал судно под днище, потом с помощью системы блоков, нос корабля медленно поднимался из воды. После чего (вот тут тоже состоит гениальность), блок вышибали, веревка ослабевала и корабль под собственным весом падал в море, уходя под воду. Можно было веревку перерезать – но тогда изобретение было одноразовым. Архимед придумал, как такую систему сделать "многозарядной". (Можно посмотреть реконструкцию этого процесса, например, тут: [22]).

Были у Архимеда и мирные изобретения, как же не быть? Например, он изобрел перископ. Т.е. изогнутую трубку с системой зеркал, позволяющую заглянуть за стену.

Или вот, например, Архимед изобрел "Винт Архимеда" – устройство, которое до сих пор используют в некоторых странах для осушения полей или для поднимания воды на большую высоту. (Про это устройство тоже можно посмотреть видео. Например, вот такое: [23]).

А что же осада Сиракуз 212 года? Так она была успешно отражена! Вот так наличие одного лишь Архимеда позволило отразить атаку громады римского легиона! Но, к сожалению, во время этой осады Архимед был убит.

Как рассказывают, в Сиракузы прорвались-таки несколько солдат. Они шли по городу и увидели старика, что-то рисующего на земле. Перед смертью Архимед воскликнул: "Только не затопчите чертежи!"

7.3

Математика Архимеда

Конечно, в первую очередь Архимед считал себя самого не инженером или изобретателем, а математиком, геометром.

Что же изобрел Архимед в математике? Во-первых, Архимед доказал, что у всех окружностей отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное (это число π). Архимед не знал π точно, но у него были работы по ограничению его сверху и снизу. Это именно он придумал способ: надо в окружность известного радиуса вписать правильный многоугольник, вычислить его периметр. Этот периметр будет меньше длины окружности. А теперь надо описать вокруг окружности многоугольник. Его периметр будет больше длины окружности. (Поделив на диаметр, получим ограничение на число π сверху и снизу).

Архимед придумал хорошее приближение для числа (сейчас это называется "архимедово приближение"; и именно поэтому русские математики празднуют "День числа Пи" не 3 марта (14.03 – это ведь в русской записи не похоже на число Пи!), а 22 июля (22/7)).

Архимед же знал правильную формулу для площади круга.

В «Началах» было установлено, что площадь круга прямо пропорциональна квадрату его радиуса. Но про число Пи ничего не сказано. Видимо, Евклид (и другие математики к тому времени) про Пи ничего не знали. Тут пальма первенства за Архимедом.

Архимед придумал (и доказал) правильные формулы площади сферы и объема шара.

Рычаг Архимед не изобретал, рычаг придумали и применяли раньше. Но Архимед полностью доказал и рассчитал принцип его действия. Именно поэтому Архимеда называют отцом такой отрасли математики как "теоретическая механика".

И по этому поводу опять анекдот.

Известный уже нам царь Гиерон решил поразить египетского царя и построить для него самый большой в мире корабль. Корабль-то построили, но вывести из доков никак не могли. Он был слишком большой и тяжелый.

На помощь, как водится, вызвали Архимеда!

– Дайте мне точку опоры, и я переверну мир! – вскричал ученый. – Что-что?

– Спорим, через неделю ты сам, о великий царь, сможешь одним пальцем спустить корабль на воду?

– Одним пальцем? Корабль, который невозможно ни поднять, ни спустить? – но спорить с Архимедом Гиерон не стал, он уже знал, на что тот способен.

И правда, Архимед разработал систему рычагов и блоков, с помощью которой корабль без труда спустили на воду. А приводилась в движение система ну не одним пальцем, но усилиями одного человека.

И еще одно из самого интересного, чем занимался Архимед. Он считал площадь под параболой. Древним грекам вообще эти самые кривые второго порядка (эллипс, парабола и гипербола) были хорошо известны, они их изучали. Так вот, Архимед получил хорошую, вполне современную формулу для площади, ограниченной отрезком параболы. Как он это получил? Примерно тот же путь спустя две тысячи лет проделают другие математики и назовут это интегрированием. Архимед разбивал площадь под параболой на маленькие трапеции, считал их площадь (получалось ограничение искомой площади сверху), а потом бесконечно уменьшал трапеции (т.е. мы бы сейчас сказали, что он переходил к пределу! но Архимед таких бранных слов не употреблял) – и именно так получил правильную формулу.

Кстати, это Архимед придумал формулу для площади треугольника, которую мы знаем под названием «Формула Герона».

На самом деле, у Архимеда настолько много потрясающих изобретений, что обо всех говорить – мне не хватит книжки. Поэтому я опять вынуждена вас отослать читать книжки поумнее. Например, [17].

Древнегреческие итоги. На этом замечательном математике, на Архимеде, мы прощаемся с Древней Грецией. Конечно, рассказ про Древнюю Грецию не полон, да мои рассказы и не претендуют на полноту. Например, формально к древнегреческому периоду относится и живший в III веке нашей эры Диофант, математик на несколько веков опередивший свое время. Его работы оставались неоцененными и недопонятыми, пока их не начали переиздавать в Ренессанс (ну, просто потому что обожали все древнегреческое), и их читал Пьер Ферма. Вот только тогда его работы оказали заметное влияние на развитие математики. Да были и другие выдающиеся ученые. По количеству математиков Древняя Греция на несколько порядков опережает следующий за ней период Средневековья. Но нельзя объять необъятное!

Мне бы хотелось только подвести какие-то итоги. Во-первых, в Древней Греции зародилась математика как наука. Главное в математике – доказательства фактов, а не сами факты. Связи вещей, а не сами вещи. Доказательства и теоретическая математика выходят на первый план и возводятся чуть ли не в ранг религии. Бо́льшая часть математики – геометрия. И геометрия (как планиметрия, так и стереометрия) на невероятно высоком уровне. Не каждый современный профессор математики сможет решить те задачи, какие решали древние греки. Вне геометрии сильно тормозило развитие отсутствие приличной записи чисел. Но при этом они уже открыли иррациональные числа. Хотя вообще-то "правильными числами" считали только натуральные – и именно поэтому в Древней Греции зародилась отдельная математическая наука – теория чисел.

Какие книги можно еще почитать.

К главам 3–7 про Древнюю Грецию.

[11]

Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. – М.: Гос.изд-во физ.-мат.лит-ры, 1969.

/**Отличная книжка. Не популярная, настоящая, научная, со ссылками на первоисточники и прочее. В ней совсем не урезана объясняемая математика. Написано не скучно, читать интересно.**/

[12]

В. Прасолов, Три классические задачи на построение. – М.: Наука, 1992.

/**В этой книге приводится как историческая справка (что это за задачи вообще), так и способы решения этих задач, предлагаемые в древности. Были способы приблизительные, были способы с использований каких-либо девайсов кроме циркуля и линейки, было еще много разных. Но и математическая составляющая хорошая. В книге есть полное доказательство невозможности разрешения этих трех классических задач.**/

[13]

«Начала Евклида» в переводе Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М.,Л.: Гос.изд-во технико-теоретической лит-ры, 1950.

/**Ну, это математическая "Библия". Читать надо или не надо – решайте сами. Но все цитаты из «Начал» Евклида в моей книге – оттуда. Я бы рекомендовала полистать, не вчитываясь.**/

[14]

М. Гаспаров, Занимательная Греция. – М.: Новое литературное обозрение, 2000.

/**Это вообще детская научно-популярная книжка, по истории, без привязки к истории математики. Но про Пифагора там есть.**/

[15]

В. Чистяков, Рассказы о математиках. – М.: Высшая школа, 1966.

*/*Достаточно простая книжка про разных математиков.*/*

[16]

Б. Рассел, История западной философии. – М.:АСТ, 2021.

*/*Бертран Рассел – математик, специалист по математической логике в основном, но при этом выдающийся философ начала-середины XX века. В 1950 году получил Нобелевскую премию по литературе как раз за то, каким чудесным слогом написаны его статьи и книги по философии.*/*

[17]

Архимед, Сочинения, в пер. И.Н. Веселовского, Б.А. Розенфельда. – М.: Гос.изд-во физ-мат. лит-ры, 1962.

*/*Это очень хорошая книжка. Это сборник записок Архимеда с переводами, расшифровками и пояснениями к его изобретениям.*/*

[18]

Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах, в пер. И.Н. Веселовского. – М.: Наука, 1974.

*/*Тот же смысл: перевод с древнегреческого всех сохранившихся трудов Диофанта. Есть историческая справка про него. Комментарии и прочее. Напомню, что Диофантом вдохновился Ферма, когда придумал свою Великую Теорему.*/*

[19]

Платон. Собрание сочинений в 4 томах. – М. Мысль, 1971-1972.

*/*Ну, это так, для общего понимания ситуации.*/*

[20]

Les Luthiers, Teorema de Thales ilustrado (

песня

). —

https://youtube.com/watch?v=Q8F538tA-jI&si=EnSIkaIECMiOmarE

*/*Видеоклип и песня аргентинской юмористическо-музыкальной группы Les Luthiers. Песня называется "Иллюстрированная теорема Фалеса" – и в ней правильно излагается теорема Фалеса. Группа очень популярна в испаноязычных странах.*/*

[21]

Euclidea (игра). —

Euclidea

. https://www.euclidea.xyz/

*/*Ссылка на сайт игры, хотя играть в приложении для телефона удобнее. Игра на построение циркулем и линейкой, для истинных математиков.*/*

[22]

Коготь Архимеда (видео). —

https

://

youtube

.

com

/

watch

?

v

=

OUaU

4

eVmwP

0&

si

=

EnSIkaIECMiOmarE

/**Реконструкция изобретения Архимеда, которое могло управляться одним человеком и топить целые корабли неприятеля.**/

[23]

Винт Архимеда (видео). —

https://youtube.com/watch?v=smAgn_gXImo&si=EnSIkaIECMiOmarE

/**Популярная российская программа Галилео рассказывает про изобретение Архимеда "Винт Архимеда" и немнож-**

ко больше./

Лекция 8

.

Математика Древнего Востока

Совершенно независимо от математики Древней Греции развивалась математика в Древнем Китае и в Древней Индии. Какие-либо постоянные отношения (торговые первым делом, конечно) налаживаются только во II веке нашей эры. До того времени развитие Европы и Азии шло практически независимо. Впрочем, и про "развитие Азии" говорить тоже нельзя. До примерно того же времени (II века нашей эры) между Китаем и Индией тоже нет никаких регулярных отношений.

А кроме того, надо понимать, что как бы мы ни силились понять Древнюю Индию и Древний Китай – сделать это очень сложно. Страны намного более закрытые, и древних источников там сохранилось намного меньше.

8.1

Древний Китай

Считается, что китайская цивилизация зародилась примерно за 2 тысячи лет до нашей эры (может, даже и за три). Первые известные письменные источники относятся к 1612 вв до н.э. И математика (в некотором виде) на них уже встречается. Например, известны гадательные кости 16 века до н.э., на которых есть изображения чисел и геометрические орнаменты. Очень любили в Древнем Китае и изображения правильных многоугольников. А, например, изображения пяти-, семи-, восьми- или девятиугольников никогда не встречались в Египте и Месопотамии. А в Китае – излюбленные элементы орнаментов.

Изображения циркуля и угольника встречаются на китайских рисунках примерно с 2000 года до нашей эры. Это, безусловно, интересно. В Египте и Вавилоне про циркуль ничего не думали, и никакие задачи на построение не решали. На рисунке 8.1 изображение примерно VI века до нашей эры. Это – китайские боги-прародители Фу Си (с угольником) и Нюйва (с циркулем). И они на всех канонических изображениях с циркулем и угольником!

Рисунок 8.1: Изображение китайских богов-прародителей. Фрагмент.

Вообще-то, про совсем-совсем древние времена в Китае нам достоверно известно мало. В 213 году до н.э. император Ши Хуан-ди приказал сжечь все книги, чтобы разрушить старый мир до основания и новый на нем воздвигнуть. Но практически сразу после его смерти (во II веке нашей эры) эти книги начали очень бурно восстанавливать по памяти.

То есть тексты да, начали появляться во II веке до н.э. Но возраст мыслей в них оценить невозможно. Например, во II веке до н.э. в Китае появляются их собственные «Начала». (Называется этот трактат «Математика в девяти книгах») Этот трактат энциклопедичен. Он содержит много задач с решениями. В нем также приведены и теоремы. Но никаких доказательств нет. Считается, что при его составлении математики вспоминали старые утерянные тексты. Как в поздней редакции «Начал» встречается очень интересный комментарий Прокла (аж отдельной строкой вошедший в историю математики), так и к «Математике в девяти книгах» добавил свои комментарии (и доказательства теорем!) переписывающий ее в 3 веке н.э. Лю Хуэй.

Появляются ли доказательства в математике Древнего Китая под влиянием греческой математики или независимо – сказать невозможно. Итак, что же из математики известно в Древнем Китае? Дроби у китайцев – обыкновенные (это не фигура речи, а математический термин. Обыкновенные дроби – это такие, которые записываются в виде числителя и знаменателя). Очень подробно изложен алгоритм сокращения дроби (который аналогичен алгоритму Евклида для поиска НОД).

Современное правило деления дробей (чтобы одну дробь поделить на вторую, вторую переверни и дроби умножь) придумали в Китае в 5 веке н.э. В Европе это открытие относится к 16 веку.

Знали китайцы площади треугольника, трапеции.

В формуле для поиска длины окружности использовали $\pi = 3$. Но (что интересно) формула для вычисления площади круга была у них правильная! $S = dC/4$ (здесь d – диаметр, C – длина окружности). Однако, уже упомянутый Лю Хуэй с помощью метода Архимеда (неизвестно, был ли он знаком с работами Архимеда, или переизобрел этот метод сам) вычислил значение $\pi = 3.14159$. Это приближение не было улучшено еще тысячу лет.

Книги 7 и 8 из «Математики в девяти книгах» посвящены решению системы линейных уравнений. По сути, изложенный в восьмой книге метод для решения системы с n неизвестными, совпадает с методом, который нам известен под названием "метод Гаусса".

Впервые для решения систем линейных уравнений используются отрицательные числа (в Европе их еще не изобрели, и изобретут только в 15 веке н.э.)

Треугольник 3-4-5 (египетский) появляется у древних китайцев примерно в 2200 году до н.э. (но это неточно)). В «Девяти книгах» пифагоровы тройки есть, но доказательства теоремы Пифагора нет (первое зафиксированное доказательство принадлежит все тому же великому Лю Хуэю).

В девятой книге появляются очень интересные задачи про измерение расстояний до недостижимых объектов (например, найти высоту горы). Лю Хуэй добавил к этим задачам еще много, и оформил их в отдельный трактат с поэтичным названием «Математический трактат о морском острове». В Европе таких задач не решали. А начали решать позже, как раз под влияием китайском математки.

А самое супер-интересное в работах Лю Хуэя – его доказательство объемов для треугольной и четырехугольной пирамиды. Дело в том, что он опять же дробил пирамиды на более мелкие объекты – и (как бы мы сказали сейчас) переходил к пределу! Таким образом, в его работах опять встречается красивые зачатки математического анализа, не хуже, чем у Архимеда.

В 3 или 4 веке нашей эры математик Сунь-цзы придумал известную "Китайскую теорему об остатках" (позднее ее рассказал европейцам в 1202 году Леонардо Фибонначи, она была неизвестна). Он же написал трактат о том, как вычислять значение корня с точностью до любого знака. Позднее в Европе этот метод был переоткрыт лишь в 19 веке (и называется он сейчас, конечно, метод Руффини-Горнера).

Как влияла математика на историю и культуру Китая? Сказать довольно сложно. Во-первых, опять же, из-за закрытости Китая. А во-вторых, потому что в Китае наоборот, государство и политика очень сильно влияли на развитие математики. Математика была под приглядом бюрократов. Очень сильно в математике соблюдались традиции. Такого математического взрыва, как в Древней Греции V–III вв до н.э. в Китае никогда не было и не могло быть. Математика развивалась очень медленно, новые знания на протяжении веков добавлялись по-маленьку. И о такой свободе математического творчества, как наблюдается в Древней Греции, древнекитайские математики могли только мечтать.

И какие же главные выводы мы должны сделать из этого очерка про Китай? Во-первых, жечь рукописи – зло. Теряются не только традиции, но и история, и знания. Во-вторых, ученым надо взаимодействовать и сотрудничать. Из-за того, что китайские ученые не стремились делиться накопленными знаниями, в Европе это все пришлось переизобретать. Но, кстати, из-за этой же закрытости, и из-за упорного следования традициям, и китайцы не знали многого из современной им математики. Математика в Европе к началу Средневековья на гораздо более высоком уровне, чем математика в Древнем Китае (несмотря на некоторые отдельные методы и теоремы)

Ну, и плюс (точнее, для Китая минус), многие вещи в математике навсегда теперь называются именами переоткрывших их людей, а имена Лю Хуэя или Сунь-цзы нам почти неизвестны.

8.2

Древняя Индия

Если говорить про наследственность в математике, то современная математика рождается из математики эпохи "Математического взрыва" 17 века в Европе (про который мы, безусловно, поговорим). А математика в Европе начинает возрождаться во время Эпохи Возрождения, и происходит от математики арабской (про которую мы, конечно, тоже поговорим). А вот арабская математика являет собой синтез математики Древней Греции и математики Древней Индии.

(А Древний Китай почти на математическую картину не влияет, лишь опосредованно, через культурный обмен с Индией).

Поэтому глава про Индию даже в чем-то важнее главы про Китай. Хотя с источниками опять все очень сложно. Хоть страна и не такая закрытая, как Китай, но зато и бардака тут больше, и все трактаты теряются в веках.

Первые сведения о древнеиндийской математике относятся примерно к 8 веку до нашей эры (то есть, еще до Фалеса). Это – серия религиозно-математических трактатов под названием Сульва-сутра (или, в более современном прочтении – Шульба-сутра).

Что интересно: на некотором уровне уже появляются доказательства! Но уровень строгости доказательств не такой, как в Древней Греции. Обычно это чертеж и надпись "Смотри!" Именно такое доказательство теоремы Пифагора встречается в Сульва-сутрах и считается исторически первым.

Что еще характерно для древнеиндийской математики? Построения! Вообще-то Сульва-сутры писали не с научными математическими целями, а с целями постройки ведийских алтарей. Даже название "Шульва-сутра" переводится "правила веревки", то есть древние индийцы умели строить разные геометрические объекты с помощью веревки. Прямые (натянуть веревку), окружности (закрепить один конец веревки и покрутить), прямые углы и так далее.

Большинство геометрических построений были абсолютно верными, ведь алтари надо было строить, согласно вере, очень точно! Даже небольшие отклонения от идеальной формы могли не просто нарушить святость ритуалов, могли навредить. Что характерно, при разных формах алтари должны были иметь одинаковую площадь. И тут у индусов тоже возникает задача квадратуры круга.

Про число π. Древнеиндийские математики знали, что $\pi \neq 3$. Но единого мнения, чему же оно равно – не было. В разных "Шульвасутрах" встречаются разные задачи, в которых возникают разные значения числа π. Тут и совсем далекое , и очень хорошее , и египетское , и вовсе уж загадочное . Эти приближения встречаются в Сульва-сутре. Но на этом они не останавливались (догадывались, что их приближения не точны) – и искали новые. В частности, встречается и хорошее приближение .

Но самое, конечно, ценное, и незаменимое, что внесли древние индийцы в современную нам математику, которую мы знаем – это запись чисел. Мы с вами уже видели, как мучились со счетом египтяне, и насколько проще было вавилонянам, использующим позиционную запись числа (пусть и 60-ричную). У индийцев возникает 10-тичная позиционная запись числа, кроме того, они вводят цифры (а не палочки). Цифры, известные нам сегодня называются "арабскими", потому что в Европу они пришли в Средние века из арабских стран. Но в арабские страны эти цифры пришли как раз из Индии. Цифры и запись числа – это ой как немало! При удобной записи, и вычисления быстрее, и многие факты становятся просто очевидными. Например, нам с вами достаточно очевидно, что это 2 делить на n. А для древних египтян это была целая теорема!

В Древней Индии в записи чисел была глубокая поэзия. Чтобы запомнить какое-то число, каждую его цифру заменяли словами. Слова были подходящими (например, 1 могли зашифровать словом "луна" или "солнце" или "нос" – потому что Луна одна, Солнце одно, нос у человека один; цифру 2 могли зашифровать словом "глаза" или "руки"; для цифры 3 индусы использовали слово "братья" (потому что у Рамы три брата) или, например, "пламя" (в их вере три пламени) и т.д. Ноль можно зашифровать чем-то типа "дыра" или "пустота" или "темнота" – что-то подобное. На самом деле, тут главное, чтобы тебе и твоим друзьям/ученикам/последователям было понятно, что именно ты имел в виду. И из таких слов сочиняли стихи, чтобы запоминать большие таблицы чисел. Например, чтобы зашифровать "2023" мы с вами могли бы использовать слова: "руки-пустота-крылья-поросята" (а потом для красоты зарифмовать что-то типа "руки пустоту поймали, крылья поросят украли".

/***Между прочим, не такое это простое занятие! Вот попробуйте зашифровать какую-нибудь дату таким образом. Например, дату вашего рождения. Я вот тоже зашифровала некую всем известную дату. Угадаете, какую?***/

Солнце загорожено твоими руками.

Темнота побеждена года временами.

Луна жизнь кошачью освещает.

С сотворения мира бог всех прощает.
Какие книги можно еще почитать.

К главе 8 про Древний Китай и Древнюю Индию.

[24]
Э.И. Березина, Математика Древнего Китая. – М.: Наука, 1980.
/**Вот это отдельная книга по истории математики в Древнем Китае. Мне понравилось читать про Лю Хуэя, в частности подробно описано и то, как он интегрировал.**/
[25]
под ред. А. П. Юшкевича, «История математики с древнейших времен до начала XIX столетия» в 3 томах, т.1. – М.:Наука, 1970.
/**Учебник по истории математики. Уже неоднократно встречался за свою полноту. В нем есть почти все, хотя некоторые исторические датировки за прошедшие 50 лет подверглись уточнению, и лучше информацию из него перепроверять.**/
[26]
В. Прасолов, История математики. —

Книга в процессе написания.

https://vvprasolov.livejournal.com/67259.html

*/*Книга по истории математики всей вообще. Пока что книга в процессе написания, постоянно добавляются новые главы. Написана очень хорошо. Про Китай и Индию я рекомендую читать именно в ней.*/*

*/*Честно признаемся, с книгами отдельно по математике Древнего Китая или Древней Индии – не густо вообще, а ограничиваясь на русскоязычные книги – и подавно.*/*

Лекция 9

.

Математика в Средние Века

Во-первых, что же такое Средневековье? Средневековье начинается с распадом Древнего Рима и заканчивается Эпохой Возрождения. Почему же Возрождение, откуда взялся такой странный термин? Дело в том, что в Европе в Средние века было все очень плохо как с наукой, так и с искусством. Они – в полнейшем упадке. К власти приходит Христианская церковь, которая меняет устои, и в частности, устраивает беспрецедентные гонения на всех ученых. Академию

Платона, просуществовавшую к тому времени почти тысячу лет, разгоняют как рассадник язычества. Собственно, обвинения в язычестве и дьяволопоклонничестве – основные претензии к ученым в Средние века. Не зря первые полтысячи лет Средневековья называются "Темными веками". Большинство ученых из Европы вынуждено бежать. Куда бежать? – в Арабские страны. Наука на территории Европы не то, что не развивается, не идет вперед такими семимильными шагами, как в годы жизни Платона и Архимеда – наука откатывается назад. Инквизиция совершенно не прощает научных идей!

И сразу же обрисую некоторый парадокс. Я вот только что сказала, что именно расцвет христианской религии, ее приход к власти, знаменует гонение на ученых и упадок науки. И это действительно так. Но! Если и сохраняются хоть какие-либо крохи старых знаний на территории Европы, если кто-то и может заниматься наукой и образованием – это монастыри и церкви. Именно в монастырских библиотеках можно отыскать какие-то знания. Именно высокие церковные чины обладают временем и возможностями заниматься наукой. Так что с одной стороны церковь как науку уничтожила (на территории Европы), так науку и сохранила.

9.1

Хранители знаний в Темные века

Например, Боэций (примерно 480–524 гг. н.э.) – был теологом, исследователем христианства. Но нам интересно то, что именно он одним из первых переводил «Начала» Евклида на латынь (с греческого). Он практически не переводил доказательств, но переводил утверждения. И позже именно его переводы сыграли решающую роль в образовании. И в том, что некое представление в Европе о «Началах» было.

В конце-концов, казнили его за ересь и колдовство. А после его смерти через некоторое время объявили святым мучеником церкви.

Рисунок 9.1: Дж.Д.Пенроуз. Досточтимый Беда диктует Евангелие от Иоанна на смертном одре.

Или вот Беда Досточтимый (672–735 гг. н.э.), монах-бенедиктинец, живший на территории современной Англии. Один из создателей древне-английского языка. Переводил на англо-сакский язык Священное писание и (что нам важнее!) античные труды, в том числе научные. После смерти (не столь трагичной, для разнообразия) его тоже канонизировали как святого, объявив "Учителем церкви". И действительно, он всю свою жизнь посвятил тому, что учил. Хранил знания, передавал их дальше.

Именно ему, Беде, принадлежат методы расчета Пасхи (которыми, собственно, мы пользуемся по сей день, только с учетом перехода с юлианского календаря на григорианский). Пасха в Библии определена рядом условий, которые по сути своей есть линейные уравнения в целых числах. Одно из главных условий: Пасха должна приходиться на первое воскресенье после полнолуния, ближайшего после дня Весеннего равноденствия. Определенный день недели (воскресенье) приходится в разные годы на разные числа. Фазы луны повторяются с периодом 19 лет (лунный круг). (Хорошо хоть, что дата Весеннего равноденствия – конкретное число!))) По всем этим причинам Пасха перемещается в календаре с периодичностью 532 года. Что и вычислил Беда.

Занимался он и согласованием календарей иудеев, римлян, англосаксов – этими методами тоже потом пользовались много столетий. Выдумывал концепции подсчета на пальцах, используя разные жесты: на пальцах двух рук он считал до миллиона.

Труды Беды оказали большое влияние на интеллектуальный фон Средневековой Европы. А кроме того, его переводы помогли как-то сохранять знания.

В качестве третьего примера, хочу вспомнить Герберта Аврилакского (940-1003 гг.н.э.), также известного как Папа Сильвестр II. Герберт был ценителем и искателем античных текстов. Написал некоторые математические научные труды (главные: «Геометрия» и «Правила счета на абаке»). Возродил использование в Европе астролябии и абака[7], которые были забыты в Европе после падения Римской Империи (т.е. примерно полтысячелетия).

Герберт Аврилакский пытался популяризировать математику и астрономию в Европе. В Европе с наукой все было довольно плохо. А вот в арабских странах – хорошо. Но поехать в мусульманские страны христианину было очень трудно. В таком случае надо было ехать в современную Испанию! Половина Испании (например, современная Андалусия: Грана-

---

[7] Абак – это общее название приборов разных стран (Древней Греции, Древнего Рима, Древнего Китая), которые по смыслу и устройству – это русские счеты. Если честно, я не знаю, какое слово будет применять правильнее, абак, как более точное, или счеты как более понятное русской душе.

да, Севилья, Кордоба…) были как раз "арабскими странами", а другая половина (например, современная Каталония) – христианскими. А общение, конечно, можно было наладить. Именно в Барселоне получал Герберт свои знания (и о математике в том числе).

Рисунок 9.2: Герберт Аврилакский

Одним из первых европейцев он знакомится с арабскими цифрами и арабскими же методами вычислений. Собственно, за это его и сжигают на костре с формулировкой "он продал душу дьяволу, потому что умел делить любые числа".

В романе «Мастер и Маргарита», кстати, Воланд говорит, что прибыл в Москву, потому что в Государственной библиотеке обнаружен архив Герберта Аврилакского.

9.2

Мусульманские страны

Однако же, главным научным центром на целое тысячелетие становятся Мусульманские страны (они же в литературе называются Арабские страны).

Именно сюда эмигрировали ученые из Европы, сюда же стекаются знания с Востока (из Китая и Индии). Поэтому в это время именно здесь происходит синтез знаний. В 9 веке центр научной жизни – Багдад, где халифы создали так называемый "Дом мудрости".

Математика Востока (и мусульманских стран в том числе) всегда носила более прагматичный характер, нежели древнегреческая. Вычислительные задачи, измерения здесь выходят на первый план, тогда как доказательства и построения уходят на второй. Если в Древней Греции, мы про это говорили, математика была чисто умственным созерцанием, и "получать выгоду" от нее было не принято, то в мусульманских странах как раз прикладная математика правит бал. Применение математика находит в торговле, ремеслах, строительстве и архитектуре, географии и мореплавании, астрономии, механике и инженерии.

Ряд интересных математических задач ставит перед учеными и религия ислама. Задача о расчете лунного календаря, об определении точного времени для свершения намаза, для определения точного направления на Мекку…

Вся действительно ценная научная литература того времени – на арабском языке. В том числе, и «Начала», конечно, переводятся на арабский. И первые полные переводы на латынь (чтобы с «Началами» могла ознакомиться вся Европа) – именно с арабского, а не с греческого.

Главные достижения арабской математики:

/**Эх, как я лихо сейчас тысячелетнее развитие запихаю в*

страничку текста! Но во-первых, поверьте, это уже немало. Вспомним только Египет, в котором на протяжении нескольких тысячелетий свитки переписывались без добавления в них новых знаний! А уж в Европе того времени вообще ничего не происходит, кроме того, что научились дату Пасхи вычислять. и снова научились пользоваться абаком.
*/

С 8 века здесь закрепляются и развиваются индийские цифры и индийская десятичная позиционная запись числа. Сейчас эти цифры называются у нас и по всей Европе "арабские". Методы вычисления в такой системе записи. (То же "правило умножения в столбик", например).

Использование и применение десятичных дробей. (Пришло из Индии, но закрепилось именно здесь).

В Древней Греции дроби были либо обыкновенные, либо по-вавилонски 60-ричные. Для чисто-теоретических знаний обыкновенные дроби хороши, но для практических знаний все равно берем не $\frac{2}{3}$, а 0,666, да?

Разработка приближенных численных методов извлечения корней (разных степеней, с большой точностью). Суммирование (некоторых) рядов.

Решение уравнений. Продвижение в деле решения кубических уравнений (о чем мы поговорим попозже в главе

10.1).

Открытие формулы, которую мы называем "бином Ньютона" для натуральных степеней.

Попытки доказать пятый постулат Евклида, в связи с чем получены его переформулировки и связь с другими математическими фактами (но об этом мы тоже еще поговорим в главе 16).

Систематизация и расширение знаний о тригонометрии, как плоской, так и сферической. Тригонометрия у средневековых арабов на поразительно высоком уровне.

Но главное достижение, конечно же, в том, что знания за эти темные века не просто не теряются, как это происходит в Европе, а преумножаются, систематизируются. Многое доводится до логического конца.

Когда мы такое читаем, возникает закономерный вопрос: А куда же делась арабская математика? Куда делась древнегреческая, почему после такого расцвета Древней Греции, научный центр перемещается в Багдад – мы обсудили. Тотальная эмиграция математиков. А почему же потом, в Эпоху Возрождения, центр научных исследований (и в первую очередь нас интересуют математические, конечно) опять перемещается в Европу? На самом деле, по этому поводу есть несколько теорий.

Теория первая. После длительного главенствования, арабские страны во время Крестовых походов начинают терять территории. В Европе у арабов отбирают испанские территории. А тут надо учесть, что Кордоба была очень крупным научным центром, со знаменитым Университетом, с самой богатой в арабских странах библиотекой (после отвоевания христианами этих территорий, библиотека исчезла, следов от нее не осталось). Да и в Толедо тоже был крупный научный центр и богатая библиотека. С востока на арабские страны наступают монголы. Научные центры, разбросанные по всему научному миру, вопервых, теряют связь, а во-вторых (и, возможно, в главных) теряют финансирование. Если надо воевать – не до науки.

Теория вторая. /**Именно такую легенду мне самой рассказывали на курсе "История математики", когда я была студенткой.**/ В XV веке великий правитель державы Тимуридов (его страна включала в себя большую часть Средней Азии) Улугбек, внук Тамерлана и сам довольно известный математик своего времени, решил создать самую подробную карту звездного неба. Для этого он даже построил в Самарканде самую большую и самую крутую обсерваторию. Короче, всем математикам своей империи он повелел заниматься вопросами этой самой карты. Карту писали несколько поколений ученых. Она устарела раньше, чем была дописана. А математики к этому времени разучились заниматься чем-либо другим.

Теория третья. Математике стало некуда развиваться. Тут арабов подвело то, что их не интересовали теоретические аспекты, а всегда – прикладные. Математика достигла такой высоты, что новых знаний больше не требовалось. В экономике – считать умели все, что требуется. В астрономии рассчитывали положение звезд с точностью до долей градуса, даже до долей секунд (напомню, что секунда = доля градуса). Задачи, поставленные религией (где Мекка? когда молиться?) были полностью решены. Так зачем же нужна математика? Не нужна.

Ну, конечно, я думаю, что произошло и то, и другое, и третье. И именно поэтому на следующем витке развития пальма первенства в науках и математике постепенно перекочует во Францию (Ой, получился спойлер! Но до этого пока далеко! это будет в XVII веке в главе 11).

9.3

Как математика потихоньку возвращалась в Европу

Развитие торговли – явный стимул к развитию математики. Не случайно, что первый крупный европейский математик Средневековья – Леонардо Пизанский (он же Фибоначчи) – по профессии купец.

Рисунок 9.3: Леонардо Пизанский. Он же Фибоначчи (1170–1250 гг. н.э.)

Именно он первый знакомит Европу с арабскими цифрами. Он предпринимает попытки решать кубические уравнения (и другие уравнения высших степеней). Ему удается доказать, что кубические уравнения не решаются в квадратичных иррациональностях (т.е. нельзя их решить только с помощью арифметических действий и извлечения квадратного корня).

/**Кстати говоря, именно это является препятствием к тому, чтобы решить задачу про удвоение куба с помощью циркуля и линейки.*

*Позже именно так доказал неразрешимость этой задачи лишь в XIX веке Пьер Ванцель. Но тогда Фибоначчи этого шага не сделал.**/

В 1202 году выходит его знаменитый и совершенно замечательный труд «Книга абака»[8] – энциклопедия математических знаний того времени. В современных печатных изданиях такая книга насчитывает около 500 страниц. Книга была адресована не только ученым, но и широкой аудитории: купцам, счетоводам, чиновникам.

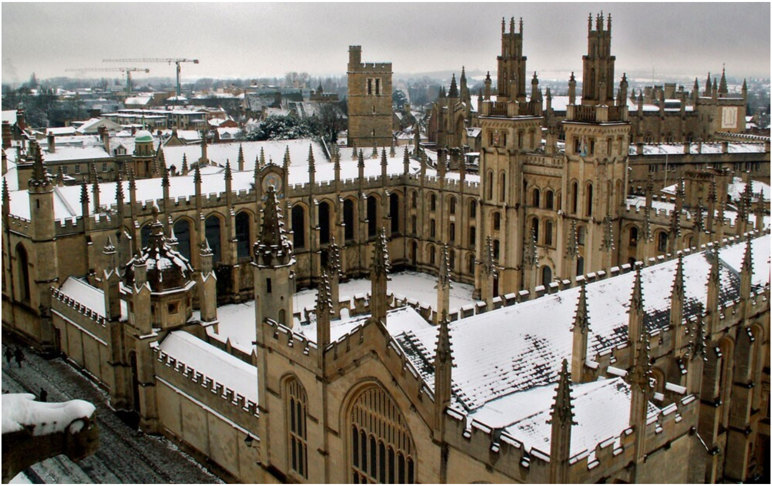
Знаменит Фибоначчи тем, что в своей книге не только пересказывает старые знания, но и ставит новые оригиналь-

[8] Фибоначчи использовал слово абака в значении "искусство счета". Т.е. по-хорошему, если до конца переводить название на русский язык, надо было бы написать «Книга искусства счета», но перевели так, и этой традиции перевода придерживаются.

ные задачи. Например, всем известная задача про кроликов: "Сколько пар кроликов родится за год от одной пары, если кролики начинают приносить потомство со второго месяца и каждая пара каждый месяц производит еще одну пару?"

Менее известны, но есть и множество других задач на разные темы. Например: "выбрать пять гирь так, чтобы с их помощью можно было взвесить любой груз массой от 1 до 30 граммов. Гири кладутся на одну чашу весов, груз на другой". Тут же встречается и более сложный вариант задачи: "какое минимальное количество гирь потребуется (и как их выбрать) для взвешивания любого груза массой от 1 до 30 грамм, если гири разрешено складывать на обе чаши весов?"

/**А вы-то, живущие на 800 лет позже после Леонардо, сумеете ли решить эти задачи? Попробуйте – это интересно!**/



9.4
Университеты

И при всем при том, что в Средние века с наукой все плохо, но после Темных веков на территории Европы открываются первые университеты. И появляется систематическое образование (в том числе, и математическое тоже).

В Кордобе (на территории арабских стран) около X века был построен университет, который (вместе с библиотекой) прекратил свое существование в XV веке.

Первый университет на территории Европы – в Константинополе – возник даже раньше, в IX веке (первого его ректора звали Лев Математик). Прекращает свое существование в XV веке с падением Константинополя и завоеванием его Османской империей.

В XI веке появляется университет в Болонье (Италия) – старейший университет из ныне работающих, не прерывавших свою историю. С ним по древности соперничает Оксфордский университет (Англия), но точная дата его открытия неизвестна (большинством историков считается, что скорее это начало XII века, а не XI).

В 1200 году возникает университет в Париже (его историческим преемником сейчас считается Сорбонна; формально Парижский университет закрылся в конце XVIII века). Следом за ним, в XIII веке появляется много университетов: Кембридж, Саламанка (Испания), Падуя (Италия), Неаполь (Италия), Тулуза (Франция), Орлеан (Франция), Вальядолид (Испания), Лиссабон (Португалия) и другие.

В Средние века Университет обычно состоял из четырех факультетов: искусств, богословия, права и медицины. Студент поступал (примерно, лет в 14) сначала на факультет искусств, где обучался около 6 лет (как бы аналог нашего бакалавриата). И после испытаний мог перейти на любой другой факультет, или даже последовательно закончить несколько (как бы аналог магистратуры). Наиболее престижным и популярным был, конечно, богословский университет. Но и учиться на нем было долго (примерно 8 лет). Иногда обучение в университете могло продолжаться 20 лет, иногда дольше.

Математике, конечно, учили на факультете искусств. Но отдельного преподавателя математики не было (как у нас сейчас в начальной школе).

Но важно, что университеты возникают! Хотя в эти времена они вовсе не всегда были необходимым элементом хорошего образования, и, честно говоря, не всегда были и самыми важными научными центрами.

9.5

Готическая математика

Развитие математики хорошо ложится на развитие искусства. Во времена Позднего Средневековья в искусстве появляется особый стиль, готика. Так и в математике в готический период (примерно XII-XV вв) начинает происходить наконец что-то интересное. В науке готическую эпоху знаменует схоластика. Схоластика – логика Аристотеля, но смешанная в равных долях с истовой христианской верой. Все, что делал Аристотель становится хайпом, достойным изучения.

Отсюда, например, возникают грандиозные достижения в логике. Появляется из самых известных логических принципов науки, бритва Оккама: «Не следует множить сущности без необходимости».

Николас Орем

Рисунок 9.4: Николя Орем переводит Аристотеля на французский.

Николас Орем (1323–1382 гг., Франция) – преподаватель колледжа при Парижском университете, епископ города Лизьё (помните, мы уже говорили, что в Средние века самыми учеными людьми, хранителями знаний были люди церковные?), наставник будущего короля Франции Карла V. Занимался многими науками. Нас больше всего интересует физика (механика). Он один из первых доходит до идеи Гелиоцентрической системы (но это не точно, он очень осторожно высказывался и так это и не высказал вслух), формулирует принцип относительности (в точности в том же виде, что позже, в XVII веке переоткрыл Галилей), одним из первых занимается равноускоренным движением, доказывает несколько теорем.

Самое интересное его достижение в математике: он доказал расходимость гармонического ряда. То есть доказал, что сумма больше, чем любое нормальное натуральное число. Доказательство его достаточно изящно и его может понять даже пятиклассник. Вот у нас есть дробь . За ней следует две дроби . Т.к. , то в сумме эти две дроби больше, чем . И общая сумма уже больше 1. Следующие 4 дроби это, все они не меньше, чем ., и в сумме все 4 дают опять больше, чем . От .до . опять больше половины. И так далее, каждый раз прибавляется больше, чем .– поэтому в итоге, конечно, станет больше любого натурального числа.

Томас Брадвардин

Томас Брадвардин (1290–1349 гг., Англия) – архиепископ Кантерберрийский. Известен своей дискуссией с Аристотелеем (заочной, безусловно, Аристотель к тому моменту уже 1,5 тысячи лет как скончался) о вечности мира. Аристотель, следуя греческой традиции и религии, утверждал, что материальный мир вечен. Брадвардин, естественно, не мог утверждать ничего иного кроме как того, что мир создан Богом (и потому имеет начало, не вечен).

Брадвардин, следуя логике Фомы Аквинского, отрицал какую-либо бесконечность. Рассуждал он так. Если бы мир существовал вечно, то в мире было бы бесконечное количество душ, поскольку Бог создает каждый день как минимум одну душу. Почему же Бог обязан создавать души? Почему не может быть бесконечное количество душ? Брадвардин отвечает так: часть бесконечного множества не отличается от целого, поэтому сотворив бесконечно много душ, Бог поступил бы нелогично, неэкономно. А Бог нелогично поступить не может.

Это и есть суть схоластических рассуждений. Схоласты всегда ищут противоречие с тезисом Евклида: "Целое не может быть равно никакой своей части" – а тезис этот для них непререкаем!

Только в 19 веке наконец математики поймут, что этот тезис не работает в случае бесконечных множеств. Окончательно докажет это и разработает непротиворечивую теорию бесконечных множеств Георг Кантор. Ирония в том, что практически все идеи Кантора так или иначе высказали Брадвардин и другие схоласты, но посчитали, что они ведут к противоречию. И только Кантор сделал последний шаг, создавая в математике понятие "бесконечность".

/**Сейчас, когда в математике благосклонно смотрят на понятие бесконечности, появилось великое множество анекдотов, иллюстрирующих идею Брадвардина (о том, что в бесконечном множестве подмножество может быть неотличимо от целого).*

В бесконечную гостиницу приехали на симпозиум бесконечно много ученых. Портье заселил их по порядку. Первого – в первый номер, второго во второй и так далее по очереди. Но тут приезжает опоздавший Кантор! Кантора никак нельзя не поселить! Поэтому портье всем ранее приехавшим говорит:

– Срочно переселяемся в номер, следующий за вашим! Гость из первого номера – во второй, из второго – в третий, и так далее.

Всем ученым хватило мест, да еще и остался один номер для Кантора!

В следующей серии анекдота, к гостинице (уже заселенной полностью математиками) приезжает второй автобус, привозящий столько же физиков! */

Но, кстати, как показала история, правильно Брадвардин не стал утверждать бесконечность Вселенной. Именно такое высказывание послужило одним из поводов сжечь на костре печально известного (не ученого, нет, философа и поэта) Джордано Бруно.

9.5.1

Коперник

Ну, и несколько забегая вперед тут же расскажу про Коперника. Чьи идеи тоже, укоренившись в голове Джордано Бруно, довели того до костра. И хотя формально Коперник жил уже в Эпоху Возрождения, но его жизнь очень похожа на то, что творилось в Средние века.

Николай Коперник (1473–1543 гг., Польша) – польский (или немецкий – тут среди историков согласья нет) ученый (математик, механик, астроном, экономист, медик, теолог). После окончания своего образования

ботал священником в разных польских городах.

Рисунок 9.5: Николай Коперник.

Пока Архимед только грозился и искал точку опоры, Коперник действительно перевернул мир. Он в своих работах убедительно доказал, что не Солнце вертится вокруг Земли, а Земля вокруг Солнца. Но если Джордано Бруно, поверивший идеям Коперника, пошел ради своих убеждений на плаху, Коперник по настоянию церкви, от этих идей отказался, публично признал, что был неправ и стал пописывать труды на эту тему дальше, но уже без публикации. И в том числе успел сделать много всего хорошего в математике.

*/*Кстати, сейчас почему-то все помнят, что Джордано Бруно сгорел на костре, отстаивая гелиоцентрическую систему супротив геоцентрической. На самом деле, у Бруно было очень много здравых идей, а уже все в сумме привели его к казни. Например, он высказывал аккуратные сомнения в непорочности Девы Марии (будучи вообще-то монахом, и человеком глубоко религиозным, верующим в Бога без каких-либо сомнений). А еще считал, что в Космосе есть много планет, подобных Земле.*

Но Джордано Бруно точно никакого отношения к нашей книжке не имеет./*

Что же сделал Коперник в математике? Доказал теорему Коперника! Если окружность катится внутри по окружности вдвое большего диаметра, то любая точка меньшей окружности чертит отрезок (диаметр большей окружности).

Эта теорема Коперника очень даже хорошо пригождается при строительстве машин и механизмов, превращая круговое движение в возвратно-поступательное.

Какие книги можно еще почитать.

К главе 9 про Средневековье.

[27]

В. Прасолов, История математики. —

Книга в процессе написания.

https://vvprasolov.livejournal.com/67259.html

/**Всеобъемлющий труд по истории математики. Читать – крайне рекомендую. Публикуется автором в интернете по мере написания.***/

[28]

под ред.С.П. Капицы, Библиотечка Квант. Замечательные ученые. – М.: Наука, 1980.

/**Симпатичная недлинная книжка. для данной главы нас интересует статья из этой книжки про Коперника.* */

[29]

П.П. Гайденко, Время, длительность, вечность. – М.: Прогресс-Традиция, 2006.

/**Книжка не по истории математики, а скорее по истории философии и науки в целом.***/

[30]

А. Даан-Дальмедико, Ж. Пейффер, Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986.

/**Это хорошая, незанудная книжка по истории математики. Она недлинная, но довольно интересная.**/

[31]

под ред. А. П. Юшкевича, «История математики с древнейших времен до начала XIX столетия» в 3 томах – М.:Наука, 1970.

/**А это всеобъемлющий академический учебник по истории математики, нам уже не раз встречался.**/

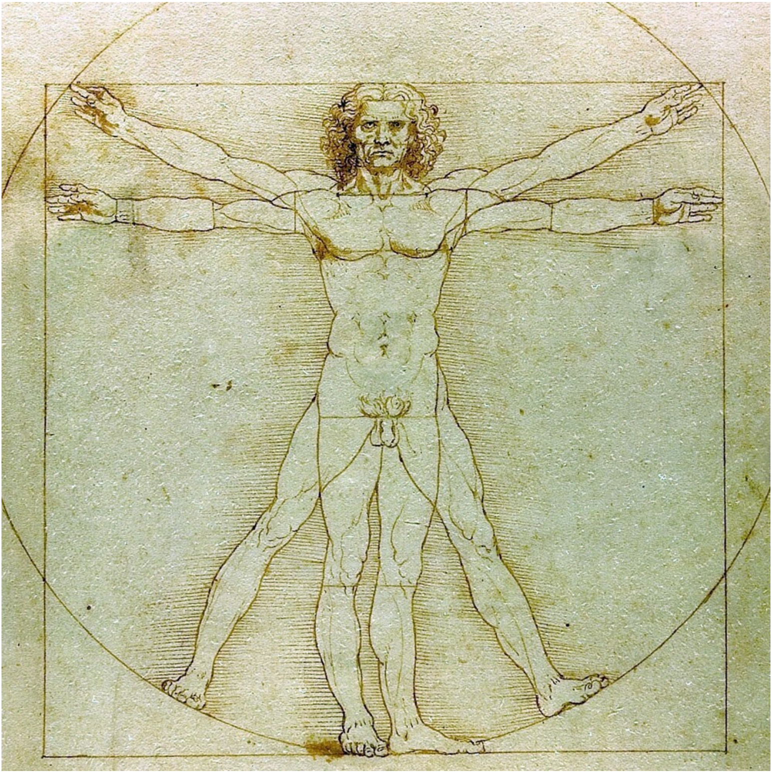
Лекция 10.

Эпоха Возрождения

У каждого, каждого явления в мире есть как плюсы, так и минусы. Когда мы говорим про Эпоху Возрождения, мы представляем себе прекрасные полотна Микельанджело, Рафаэля, да Винчи. Прекрасные дворцы и храмы Неаполя или Палермо. Мы знаем, что сам термин "возрождение" означает что-то хорошее. В нашем случае это возрождение интереса к науке Древней Греции, возрождение искусства, начало возрождения человека как человека свободного. Возрождение после долгой спячки Средневековья.

Именно в Эпоху Возрождения (к концу 15 века) возникает книгопечатание – великий этап на пути распространения знаний! Представьте себе, теперь не надо длинные труды (такие, как, к примеру "Начала" Евклида) переписывать вручную. Можно сразу напечатать много копий, на всех хватит!

Однако же, не стоит забывать, что Возрождение – очень жестокая эпоха. Именно к этому периоду относятся самые зверства и расцвет Инквизиции (с гонениями на любых "нехристей", особенно отличалась Испанская Инквизиция). Сжигание на кострах, пытки, прочие прелести. Именно к этому периоду относится правление самых жестоких Римских Пап (которые в те времена, до Реформации, были самыми могущественными людьми в Европе). Убийства в подворотнях, воровство и разврат.



/*

Простите, не смогла удержаться. Некоторые историки пишут, что в 16 веке самой распространенной причиной смерти были не войны или ранения. Не чума или проказа. Это был банальный сифилис.

*/

Рисунок 10.1: Витрувианский человек Леонардо да Винчи

Зачастую, читая про великого художника эпохи Возрождения, мы узнаем, что он был пьяницей, казнокрадом, убийцей. Если мы говорим про ученого или художника современного – мы зачастую подразумеваем какой-то его внутренний долг перед человечеством. Например, хорошо известно, почему Эйнштейн никогда не работал в атомной программе ни одной страны. Он настолько хорошо осознавал свой долг как ученого, что не смог бы хранить государственную тайну такого масштаба. Но ученые, поэты, художники XV–XVI века не видят перед собой никаких долгов. Они свободнее. Никакими моральными долгами ученые и люди искусства того времени не связаны.

Вот она, обратная сторона монеты. Люди пытаются нащупать рамки и пределы не только в хороших, светлых сторонах жизни, но и в плохих, самых темных тоже.

В Эпоху Возрождения очень хорошо проявляется поговорка "талантливый человек талантлив во всем". Типичный деятель Эпохи Возрождения увлекается сразу всем! Леонардо да Винчи – яркий из типичных примеров Человека Эпохи Возрождения. Он увлекается всем. И медициной, и изобразительным искусством, и изобретательством. Не чужд Леонардо и философии, и писательству. Практически все художники Высокого Возрождения, были одновременно поэтами. Джероламо Кардано, возникающий в следующем параграфе – и лекарь, и астролог, и мистик, и математик, и инженер. Вот такая универсальность была свойственна ученым этой эпохи. Такой универсальности мы не наблюдали и наблюдать не будем. Ученые обычно (за единичными исключениями) занимаются либо чем-то одним (математикой, например), либо близкими, связанными областями (математикой и физикой; живописью и скульптурой). В Эпоху Возрождения же все наоборот. За редкими единичными исключениями ученые занимаются всеми областями знания одновременно!

Надо признать, что несмотря на расцвет всех подряд наук, к математике как к таковой интерес в Эпоху Возрождения еще не просыпается. Занимаются искусством, медициной, физикой – да. Математикой – мало. При всем при том, что Леонардо да Винчи занимался просто всем, чем возможно, математикой-таки он так и не увлекался.

Однако же, некоторые успехи у математики в этот период есть. Самые выдающиеся из них, наверное, это алгебраические обозначения, введенные Виетом (что позволило вскоре развиться алгебре и прочим вычислениям), разработка теории перспективы (что стимулировало развитие неевклидовых геометрий, хотя про это еще никто не знал) и умение решать кубические уравнения (что дало толчок к изобретению в будущем комплексных чисел). Но обо всем по порядку.

Рисунок 10.2: Арабский математик и поэт Омар Хайям (1048 – 1131 гг.)

10.1

О том, как научились решать кубические уравнения.

Квадратные уравнения, несмотря на отсутствие приличных алгебраических обозначений, решать умели в общем виде. Еще на древних вавилонянских глинобитных дощечках приведен алгоритм их решения, полностью эквивалентный формуле , известной (лучше, чем "Отче наш") любому 8-класснику.

У древних же вавилонян были таблицы для решения кубических уравнений вида $x^3+x = a$. (С точки зрения древней математики у такого уравнения ровно одно решение). Конечно, решения эти были найдены приближенно.

А перед более поздними математиками встал вопрос: как же решать произвольные кубические уравнения? Одним из первых каких-то результатов добился Омар Хайям, который решал кубические уравнения вида $x^3 +ax = b$, путем поиска пересечения параболы и окружности. Но ни общего решения для всех-всех случаев, ни алгоритма поиска этой точки пересечения, ни тем более формулы у него-таки не было.

Что такое "для всех-всех случаев"? Дело в том, что математики XV века еще не знали ни отрицательных чисел, ни нуля. Поэтому все уравнения они делили на такие типы:

$x^3 +ax=b$

$x^3 = ax + b$

$x^3 + b = ax$

Это все были разные типы квадратных уравнений, математики того времени не догадывались и не могли записать все в общем виде $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Они научились избавляться от квадратного члена (выделяя полный куб). После этого очевидно, что уравнения, когда все слагаемые в одной части, решений не имеет (ведь, напомню, они не знали отрицательных чисел, то есть сложив три числа никак не могли получить ноль, тем более, что и с нулем у них в те времена был напряг). В общем, не умели они решать эти уравнения.

Более того, в конце XV века самый известный на то время математик, Лука Пачоли (монах, конечно же; а еще основоположник такой замечательной науки как "бухгалтерский учет"), явным прямым текстом заявил, что никаких формул и алгоритмов для решения кубических уравнений нет и быть не может. Точка.

Но точку превратил в многоточие итальянец Сципион дель Ферро (1465 – 1526). В начале 16 века для решения уравнения вида x он изобрел формулу

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Как он ее изобрел – науке это не известно, никаких записей не осталось. По обычаю того времени, формулу публиковать дель Ферро не стал, а сообщил ее своему родственнику и ученику Фиоре. Который использовал это открытие для побед на популярных в ту пору математических турнирах.

В Эпоху Возрождения турниры били приняты во всем! Рыцарские турниры – тот период, поэтические турниры – тот период, и математические турниры тоже. Именно так математики делали себе рекламу, чтобы устроиться на работу в какой-нибудь престижный университет – участвовали в турнирах.

Фиоре был непревзойденным решателем кубических уравнений! Побеждал на разных турнирах, пока наконец на одном из них не встретил Тарталью.

Рисунок 10.3: Николо Тарталья (1500–1557 гг)

Николо Тарталья. Тарталья – не фамилия (фамилия у него была Фонтана), Тарталья – это кличка, под которой он вошел в историю науки. (Тарталья значит "заика", но на самом деле Тарталья не заикался, он был ранен во время военных действий в гортань, поэтому действительно говорил очень плохо). В математике он был самоучкой. Но именно Тарталья первый математически точно доказал, что максимальная дальность полета снаряда будет, если пушку расположить под углом (т.е. 45). Эти работы принесли ему известность.

Тарталья и сам пытался научиться решать кубические уравнения, но пришел к выводу, как и Лука Пачоли, что это невозможно. То ли Фиоре вызвал на дуэль Тарталью, пытаясь показать, что он круче (никаких достижений, кроме того, что он знал формулу, изобретенную его учителем за ним не числилось). То ли сам Тарталья, не веря в то, что Фиоре знает формулу, решил его вызвать на турнир, и прилюдно опозорить. Разные источники рассказывают по-разному. Факт в том, что турнир состоялся.

Что такое математический турнир в те времена? Два соперника обменивались пакетами из 30 задач. Каждый должен был решать задачи, выданные соперником. Потом – докладывать решение перед неким жюри. Самое забавное: никакого правильного ответа на свои задачи предъявлять было не нужно. Победителем объявлялся тот, кто решил больше задач. Ему побежденный платил некоторое количество денег, плюс проигравший должен был устроить обед для победителя и его друзей в таком количестве, на сколько задач проиграл. На решение отводилось 50 дней. В жюри, конечно, входили обычно математики, но также на турнир приходили поглазеть и обычные люди (интернета и даже телека не было, а тут какое-никакое – развлечение). Иногда участники турнира приводили с собой на турниры вооруженных специально обученных людей, чтобы они подсказывали жюри правильное решение. Так что, к радости зрителей, нередко такие турниры заканчивались и дракой!

В общем, кто кого вызвал – я вам не скажу. Но что характерно, участники турнира выдали друг другу задачи, которые в большинстве своем как раз сводились к кубическим уравнениям! И вот, Тарталья получает свой пакет с задачами, которые Фиоре специально подготовил (ведь он один в мире умел решать кубические уравнения). Что же делать Тарталье? Он, конечно, почти уверен, что Фиоре тоже ничего не решит, но вдруг? И он срочно изобретает ту же формулу, которую мы видели!!! (И даже с перепугу проиграть, учится решать еще второй случай.) Тарталья решил все 30 задач. Фиоре ни одной.

– Как так вышло? – спросил любопытный читатель. – Мы же только что узнали, что он умел решать кубические уравнения!

Во-первых, там были не уравнения, а задачи, которые еще надо было свести к уравнениям. Во-вторых, не известно, действительно ли там были уравнения именно нужного типа, может, были уравнения другого типа? А в-третьих… А в-третьих, знание формулы не всегда помогает решить уравнение, дорогие мои!

Вот смотрите. Например, есть у вас уравнение Если подставить это в формулы дель Ферро, получится

.

Но ведь очевидно (глазами видно!), что у уравнения корень 1, более того, корень единственный (левая часть возрастает, правая – постоянна). А по формуле получается какая-то "бяка". Вот, возможно, задачи Тартальи были подобраны именно так, чтобы по формулам получалась бяка. А решение-таки было.

/**Все в порядке, никакого противоречия в математике мы не нашли. Дело в том, что эта самая "бяка" в точности равняется 1, если провести хитрые арифметические преобразования. А именно, учесть, что* */

Короче, Тарталья тоже научился решать уравнения первого типа и победил Фиоре! И, кстати, получил потом хорошую престижную работу в университете.

Джероламо Кардано – универсальный ученый. Медик, астролог (услугами Кардано-астролога пользовался сам Папа

Римский!), механик (предложил Карлу V конструкцию подвески карет, которую позже назвали его именем – карданный вал (хотя он его не изобретал, если честно)). Но и математик в том числе. Написал книгу по теории вероятностей (хотя тогда такой теории еще не было) «Книга об игре в кости».

Человеком был невероятно честолюбивым, азартным, страстным. Верил во все сверхъестественное, в демонов, в собственные "суперсилы", во всякий мистицизм. (Что сыграло в математике, как ни странно, и положительную роль – иначе он никогда не додумался бы до комплексных чисел). /*И давайте вот такой вам штришок в общую беспощадность Эпохи Возрождения вообще и в портрет Кардано в частности. Кардано (между прочим, сам врач!) однажды за неповиновение отрезал своему сыну ухо. Ну, потому что надо слушаться родителей – иначе зачем ему уши вообще? А времена были беспощадные… */

Рисунок 10.4: Памятная медаль Джероламо Кардано (1501 – 1576).

Кардано, будучи честолюбив, хочет написать великий математический труд. Который заменит существовавший на тот момент эталон в лице книги Луки Пачоли (которая в свое время заменила книгу Фибоначчи). Чтобы его труд был действительно велик, Кардано хочет включить туда и формулу дель Ферро – Тартальи. Просит Тарталью рассказать ему формулу. Но Тарталья отказывает. Во-первых, может, его формула станет жемчужиной его собственной книги? (Которую он хотел бы написать, но так и не написал). Во-вторых, чем меньше людей знает волшебную формулу, тем ему лучше для участия в турнирах! В-третьих, Тарталья боится, что Кардано формулу банально украдет, присвоит авторство себе.

Но после долгих уговоров, Тарталья по секрету рассказывает Кардано формулы для двух случаев, без доказательства, и взяв обещание не публиковать. И действительно, в своей книге "Практика общей арифметики" Кардано эти формулы не публикует. Но он не перестает про них думать. Даже едет за подробностями в Болонью (где раньше жил дель Ферро), чтобы узнать подробности.

Короче говоря, Кардано самостоятельно доказывает и формулы для первого и второго случая. И придумывает формулу для третьего случая. Третий случай – самый сложный. Дело в том, что именно в третьем случае, в единственном из трех, у кубического уравнения может оказаться не одно, а два или три решения! Короче, Кардано доводит дело до конца и пишет отдельную книгу «Великое искусство», целиком посвященную решению кубических уравнений. В предисловии Кардано излагает историю вопроса. Что формулу для первого случая первым изобрел дель Ферро (иначе мы бы про это вообще не узнали!), что формулу для второго случая первым изобрел Тарталья, и переоткрыл формулу для первого случая. И что Кардано лишь завершил работу вместе с учеником Феррари.

Во-первых, в этой книге Кардано все аккуратно доказывает. Во-вторых (что еще даже важнее!) в этой книге впервые Кардано использует "неизвлекаемые" корни из отрицательных чисел! В некоторых случаях в промежуточных вычислениях действительно возникают корни из отрицательных чисел, которые в итоге сокращаются и дают хороший, действительный ответ.

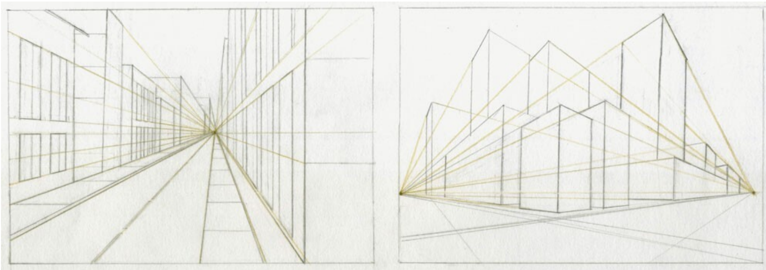
Ну, и в-третьих, в этой же книге включены результаты Феррари (ученика Кардано), который сводит уравнение 4 степени к уравнению 3 степени и двум квадратным (т.е. приводит алгоритм решения уравнения 4 степени).

Второй турнир. После выхода в свет «Великого искусства» Тарталья взбешен! Обвиняет Кардано и Феррари в плагиате (хотя никакого плагиата не было – Кардано честно написал, кому принадлежит приоритет). Феррари, молодой и горячий, вызывает Тарталью на турнир!

На этом диспуте присутствовал весь свет Милана, в том числе и сам губернатор! Кто лучше выступит, тот и прав. Все решится здесь и сейчас. Тарталья – пожилой уже человек, ему 48. Он почти не может говорить. Феррари – молод (ему 26), хорош собой, красноречив (и ничуть не глупее Тартальи вообще-то!) А турниры всегда имели элемент театральщины. Феррари выиграл. Тарталья проиграл.

10.2

Перспектива



Если первая половина главы про Эпоху Возрождения посвящена чисто математическому открытию (и до сих пор можно сомневаться, имеет ли приложение где-либо "в жизни" умение решать кубические уравнения не численно, а формулой), то вторая половинка главы будет посвящена Теории Перспективы – а это, скажу по секрету, совсем наоборот. Это открытие, конечно, но открытие не математическое! Вся необходимая математика возникла еще во времена Евклида. Но тогда не понимали, как ее применять – и не применяли. Так что же такое эта самая "Теория перспективы", причем тут математика, и, если это не математика, то что?

Давайте сравним картины[9], которые начали писать после XV века, со средневековыми (в те времена это будут в основном иконы: русские, европейские, византийские – но это не страшно; кстати, если мы берем русскую или византийскую икону, то их можно брать даже позже XVI века, открытие Теории Перспективы, перевернувшее итальянскую, а вместе с ней и всю европейскую, живопись, до Православной церкви еще долго не доходило). Возьмите что-нибудь и сравните. «Рождение Венеры»[10] Боттичелли с «Троицей»[11] Андрея Рублева, например. Или «Собор двенадцати апостолов»[12] (икона 14 века анонимного художника) с «Тайной вечерей»[13] Тинторетто. Или же две картины на один сюжет «Первый

[9] В этой главе мне понадобилось для иллюстрации некоторое количество картин. Глава же про изобразительное искусство! Я старалась брать известные картины, чтобы крутой читатель мог не прерываясь от чтения просто вызывать в голове их образы. Но тем не менее, все названия картин снабжены также ссылками на эти картины (либо в Википедии, либо на официальном сайте музея, где эти картины хранятся), чтобы можно было с картинами ознакомиться, не тратя дополнительно время на гугление.

[10] «Рождение Венеры» Боттичелли https://www.visituffizi.org/artworks/the-birth-of-venus-by-sandro-botticelli/

[11] «Троица» Андрея Рублева https://www.tretyakovgallery.ru/issues/andrey-rublev-svyataya-troitsa/

[12] «Собор двенадцати апостолов» https://pushkinmuseum.art/data/fonds/europe_and_america/j/1001_2000/zh_2851/index.php?lang=ru

[13] «Тайная вечеря» Тинторетто https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3e/Tintosoup.jpg

ленский собор» 16 и 19 века (см.рис.10.5).

Рисунок 10.5: Картины «Первый Вселенский собор»

М.Дамаскина (XVI век) и В.Сурикова (XIX век).

Что бросается в глаза? Картины художников позднего Возрождения (и позже) выглядят реалистичнее, правдоподобнее средневековых икон. Картины Нового Времени выглядят как кусочек жизни. Может быть, до фотореализма им еще далеко, но почти. Я ни в коем случае не хочу сказать, что картины красивее икон. Вовсе нет. Даже орнамент, где о реалистичности не может идти речи, может быть красив сочетанием линий, красок. А реализм, безусловно, может быть уродлив и некрасив. Но вот эта "реалистичность" – очевидна. Или, можно сказать, наоборот, нереалистичность старых икон (картин) бросается в глаза. Человек вдалеке может быть того же размера, что человек вблизи. У дома могут быть видны одновременно три стены, человеческие фигуры неестественны, не похожи на живые. Что же произошло? Откуда к XVI веку в живописи появляется реалистичность?

Во-первых, в XV веке начали задумываться о том, что художнику надо знать анатомию. Так, у Микельанджело или Рафаэля уже анатомически правильно прорисованы мышцы, кости и прочие части человеческого тела. Пропорции соблюдены (голова не больше остального туловища) и так далее. Второе (и безусловно, в изобразительном искусстве тоже важное открытие): художники наконец нашли правильные цвета. Нашли тот оттенок зеленого, который соответствует листве, и именно тот оттенок голубого, который соответствует небу. Это не условно-голубое (а поэтому небо) и не условно-зеленое (а поэтому трава). Это трава, а поэтому оно вот такое зеленое; а это небо – и поэтому оно именно вот такое голубое.

Рисунок 10.6: Прямая линейная перспектива. Мануэль Висенте.

Но нас, конечно же, интересует третья (и самая уважаемая среди искусствоведов) причина этой художественной революции, которую можно сформулировать так: художники научились изображать предметы на холсте так, чтобы их пропорции соответствовали тем пропорциям, которые воспринимались бы глазом, будь это изображение реальным. И дело не только в том, что близкие предметы больше, а далекие меньше (это только первый шаг к правдоподобию, но не его гарантия) – нам важно не качественное, а количественное соотношение этих "больше/меньше". Должен существовать какой-то принцип, который гарантирует правильность этого соотношения. Этот принцип называется «Принцип прямой перспективы».

Приблизительно принцип перспективы гласит следующее. Предметы на плоскости должны быть изображены так, чтобы все параллельные прямые (по которым скользит наш взгляд) сходились в одной (достаточно удаленной) точке на холсте или даже за пределами холста. Если параллельных направлений несколько, то точки схода должны лежать на одной прямой, которая называется "горизонтом" (горизонт – параллелен горизонтальной стороне картины). Ой, проще нарисовать, чем объяснять словами.

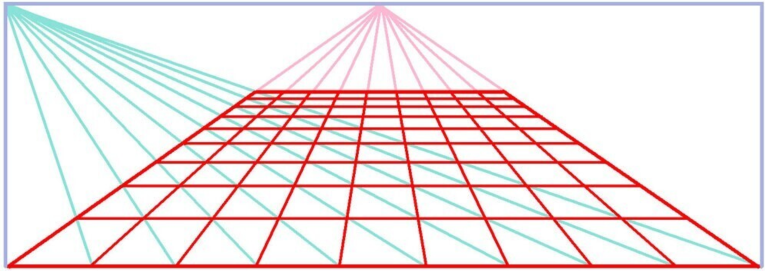


Рисунок 10.7: Принцип прямой перспективы.

Подобный рисунок (см.рис.10.7) встречается в книге Альберти «О живописи» (1435 г). Мы понимаем, что на таком "клетчатом листе" стороны квадратов параллельны – поэтому они пересекаются в одной точке. Диагонали квадратов тоже параллельны – и тоже пересекаются в одной точке. Если мы теперь выделим еще какие-либо параллельные линии (например, другие диагонали) – они все пересекутся в одной точке и эта точка будет лежать на линии горизонта.

На старых картинах (до XV века) про этот принцип перспективы и не видно. В начале XV века мы замечаем, что художники уже понимают этот принцип и строят перспективу (пусть и немного на глазок, и линии хоть и идут примерно в одну точку, все же не сходятся четко в одной точке). Уже к началу XVI века все картины построены очень четко в соответствии с этим принципом.

Возьмите картику «Христос и грешница»[14] Тинторетто. На ней – ярко выраженные линии, которые должны быть параллельны. Попробуйте приложить к ним линейку – и действительно, все параллельные линии сходятся в одной точке.

На официальном сайте музея картины «Тайная вечеря»[15] Леонардо да Винчи [38] есть разбор картины, в том числе нарисованы перспективные прямые с точкой схода.

/**Обратите внимание, что принцип прямой перспективы не только делает картину более правильной, но одновременно делает ее намного более выразительной. Обычно если на картине прослеживается одна точка схода явных прямых – это смысловой центр картины. Человеческий взгляд, скользя по прямым, постоянно натыкается на этот центр. Так, на картине "Тайная вечеря", центр не мог быть ни в каком другом месте, кроме как на Иисусе Христе.* */

С точки зрения геометрической оптики принцип прямой перспективы выглядит более чем естественно. И с точки зрения такой области математики, как "Проективная геометрия" – тоже. Но и геометрическую оптику, и проективную геометрию выдумали позже! Проективная геометрия как раз рождается из принципа перспективы примерно в начале XVII века. (Математика появляется из изобразительно-

---

[14] «Христос и грешница» Тинторетто. https://www.barberinicorsini.org/artwork/?id=WE4180

[15] «Тайная вечеря» Леонардо да Винчи https://cenacolovinciano.org/story/una-potente-macchina-teatrale/

го искусства, которое в свою очередь, чтобы развиться до таких высот, как развилось, вынуждено было прибегнуть к помощи математики).

Автор "Принципа прямой перспективы" – Леон Батиста Альберти (1404 – 1472 гг.). Леон Батиста Альберти – был типичным "человеком Возрождения" и занимался всем подряд. И верховой ездой, и музыкой, образование он получил в области юриспруденции, но оставил ее ради занятий физикой, математикой. И главное – живописью и архитектурой (прославился он больше всего именно как архитектор, и во Флоренции и по сей день можно восхищаться зданиями, построенными по его проектам). Ну, в общем, этот самый Альберти придумал, что зрение – это как лучи, испускаемые глазом. Соответственно, лучи из глаза расходятся как бы по пирамиде или по конусу (вершина которого в глазе, а основанием может служить лист бумаги, будущая картина). "Принцип прямой перспективы" Леон Батиста Альберти излагает в трактате "О живописи", и хотя он постоянно цитирует Евклида, вообще говоря, математика процесса построения правильного перспективного объекта – не очень ясна.

Еще одно важное имя в "теории перспективы" – Пьеро дела Франческа (1420 – 1492 гг.), в молодости бывший одним из известнейших художников своего времени, но к старости (когда зрение он начал терять) обратившийся к математике (про одного из его учеников – математика Луку Пачоли – мы уже упоминали). Новое у Пьеро дела Франчески – пропорциональное изображение отрезков и ломаных. Возьмем правильный пятиугольник. Если мы его нарисуем как правильный пятиугольник, он получится не лежащим (на полу, например), а висящим в воздухе (параллельно плоскости картины). В своей книге Франческа приводит примеры, как такое рисовать. Мы понимаем, что должно получиться в итоге. Но не понимаем, как этого добиться. На самом деле, четкого ясного ответа не дают ни Альберти, ни дела Франческа. Они считают это особым талантом художника. А вот кто дает правильный ответ, раскрывает тему от начала и

конца – это Альбрехт Дюрер.

Альбрехт Дюрер рано проявил талант художника и в 13 лет его отдали в ученики к известному живописцу Вольгемуту, где он овладевает не только живописью, но и гравюрой, резкой по дереву и т.д. После обучения он отправляется в странствие по Европе (начиная, ясное дело, с германских государств – их тогда было очень много; как в сказках можно было от дворца одного короля за день-два пешком доходить до дворца соседнего королевства). В странствиях он знакомится с трудами Евклида, Пачоли, Альберти – и находит мечту всей своей жизни. Он хочет сделать так, чтобы живопись, изобразительное искусство были основанны на математике. И пишет большой трактат «Четыре книги о пропорциях», как раз о математике в живописи. Трактат был очень сложный, художники его не понимали, Дюрер отредактировал трактат, сделав его ближе к народу (убрав много сложной математики, изложив все проще) – и это стало очень известное его «Руководство к измерению циркулем и линейкой», где он практически закладывает полностью основы такой науки как "начертательная геометрия", и которое читали все (приличные) художники того времени. А кроме того, это стало одной из самых первых книг по математике на немецком языке.

Ремарка в сторону. Художники считают Дюрера художником (увлекающимся какими-то там чиселками), математики – математиком (увлекающимся какими-то там красками и кисточками). Но совершенно непреложный факт в том, что он писал картины, изображая на них кучу математических объектов, некоторые из объектов – выдумывал сам. Например, больше всего математики ценят его картину «Меланхолия» (см. рис.10.8).

В правом верхнем углу картины изображен магический квадрат, построенный Дюрером[16], но есть и много других математических объектов. Попробуйте их самостоятельно поискать.

И вот что еще точно совершенно бесспорно: Дюрер писал книги по математике (содержащие его собственные изобретения), где много размышлял об искусстве, снабжая их иллюстрациями собственного изготовления. Так что, судите сами, кем он был: математиком или художником.

---

[16] Магический квадрат – квадрат, в который расставлены неповторяющиеся числа так, что сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и на обеих диагоналях – одинаковая. В данном случае, 34. В нижней его строчке два средних числа (15-14) дают год создания картины. Считается, что это самый первый магический квадрат в европейском искусстве, до этого магическим квадратами баловались и вписывали их в искусство только китайцы

Рисунок 10.8: А.Дюрер. Меланхолия

Итак: Дюрер формулирует принципы перспективного изображения. Руководствуясь этими принципами, позже возникает еще одна забавная штука в искусстве – анаморфоз. Художники рисуют на своих картинах изображения, которые при прямом взгляде на картину выглядят как попало, но если посмотреть под определенным углом – складываются в определенное изображение. Самым известным примером считается картина Ганса Гольбейна «Послы»[17] (надо обратить внимание на непонятное пятно в ногах у послов, и взглянуть на него под углом – на самом деле, это череп).

А сейчас по всему миру есть целые музеи картин (плоских картин, конечно же), которые с определенной точки зрения выглядят (и фотографируются) как кусочек реальности.

Какие книги можно еще почитать.

К главе 10 про Эпоху Возрождения.

[32]

С.Г. Гиндикин, Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, НМУ, 2001.

/**Совершенно невероятно-замечательная книжка про интересных ученых. Написано очень захватывающе, хотя физико-математические подробности не урезаны. Конкретно, к Эпохе Возрождения относится рассказ про Кардано.**/

---

[17] «Послы» Ганса Гольбейна https://www.nationalgallery.org.uk/paintings/hans-holbein-the-younger-the-ambassadors

[33]

А. Даан-Дальмедико, Ж. Пейффер, Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986.

/**Симпатичная книжка по истории математики.* */

[34]

В. Прасолов, История математики. —

Книга в процессе написания.

https://vvprasolov.livejournal.com/67259.html

/**Всеобъемлющий труд по истории математики. В процессе написания.**/

[35]

Я. Буркхардт, Культура Возрождения в Италии. – М.: Юристъ,

1996.

/**Не по истории математики, но чтобы понимать культуру (и бескультурие) Эпохи Возрождения. Читать – очень интересно. И развенчано много мифов.**/

[36]

В.Н. Лазарев, Начало раннего Возрождения в итальянском искусстве. – М.: Искусство, 1979.

/**То же. Не по истории математики. Но по истории искусств, что в Эпоху Возрождения очень живо перекликается с историей всех наук.**/

[37]

Р. Манкевич, История математики от счетных палочек до бессчетных вселенных. – М.:Ломоносовъ, 2011.

*/*Для этой главы в книге нас интересует кусочек про Альбрехта Дюрера и вообще про перспективу.*/*

[38]

Разбор картины «Тайная вечеря» Леонардо да Винчи. — Тайная вечеря

*/*Тут полный разбор картины на итальянском языке. Но слава Яндекс-транслейт – все понятно. Нас интересует показанная перспектива на картине. Это можно понять без слов.*/*

Лекция 11

.

Математический взрыв XVII века

Для того, чтобы погрузиться в историческую атмосферу XVII века, я всегда рекомендую студентам представить себя внутри книги «Три мушкетера»: дуэли, короли, интриги, страсти, войны и честь. Ну, конечно же, это если говорить грубо. И пока мы еще не слова не сказали о математике.

XVII век – очень особенный век для математики. Его называют веком математического взрыва. Математика в это столетие развивалась настолько буйно и настолько взрывообразно, как никогда ранее и никогда позже. Даже в Древней Греции, в которой математику возводили чуть ли не в ранг официальной религии, и во времена которой, безусловно, были заложены все основы математики в общем, такого развития не было. Кроме буйного и невероятного развития, XVII век особенный, потому что именно тогда математика выплескивается за свои собственные рамки, и проникает во всю культуру вообще. В литературу, в изобразительное искусство, в философию… Ну, и причина еще одна, которая перекликается с буйным ростом и развитием: именно в XVII веке закладываются начала разных математических наук, разных отраслей математики: появляется математический анализ, теория вероятностей, аналитическая геометрия, проективная геометрия (без которой позже не могла бы возникнуть геометрия неевклидова), и прочее, и прочее.

И, безусловно, в XVII веке возникает целая плеяда ученых-математиков. Если за целое тысячелетие Средних веков по пальцам можно сосчитать математиков, вписавших свое имя в историю науки, то в одном только XVII веке их насчитывается больше! Мы отдельно поговорим про Декарта, Паскаля, Лейбница и Ньютона в следующих главах. Пристально посмотрим на их жизнь и творчество. Но и кроме них нельзя не упомянуть множество имен.

Рисунок 11.1: Пьер Ферма (1601 – 1665 гг.)

Например, красавец-мужчина, отец пятерых детей, советник парламента в Тулузе, полиглот, свободно владеющий латынью, греческим, итальянским и испанским (до такой степени, что и стихи писал на этих языках) – и блестящий математик, один из самых известных математиков всех времен – Пьер Ферма (рис.11.1).

/**Пьер Ферма чуть ли не единственный великий математик 17го века, проживший жизнь в счастливом браке. Остальные великие той эпохи все почему-то были в личной жизни, к сожалению, очень несчастными людьми.**/

Пьер Ферма занимался самой разнообразной математикой. В его переписке с Паскалем закладываются основы теории вероятностей. Он считается одним из основоположников аналитической геометрии (сразу за Декартом). Много работал он и над математическим анализом. Занимался также и механикой, и проективной геометрией. Среди его работ – множество крайне интересных фактов из теории чисел. Среди прочих: Малая и Большая теоремы его имени. Малая теорема Ферма была доказана самим же Ферма, после передоказана множеством самых разнообразных методов и вообще известна всем (и применима всеми), кто хоть чуть-чуть занимается математикой. А вот с его Великой Теоремой (которой он и остался знаменит даже вне математических кругов[18]) сложнее.

Ферма читал труды древнегреческого ученого Диофанта. И на полях записал: "Я нашел преинтереснейший факт. Не бывает чисел[19], таких, что , если $n > 2$. Но поля здесь настолько малы, что доказательство этого факта у меня тут не влезло". Факт, в общем-то понятный даже 7-класснику. Если $n = 2$, то бывают такие числа, что $a^2 + b^2 = c^2$, они называются "пифагоровы тройки" и изучались математиками еще задолго до появления Пифагора на свет. Самая известная из пифагоровых троек 3-4-5 ($3^2+4^2=5^2$). И таких пифагоровых троек бесконечно много. А вот если степень больше 2 – таких чисел не бывает. Два куба в сумме не дают третий куб, две четвертых степени не могут дать четвертую степень и т.д. Факт понятный-то понятный, но как его доказать? Ферма сам считал, что доказательство ему известно (возможно, только для случая кубов, но это не точно). Однако же, у математических потомков ушло больше 350 лет на доказательство этой теоремы![20] Во многом, в течении следующих трех с половиной веков развитие математики в той или иной степени бы-

---

[18] Например, по мотивам этой самой Великой Теоремы режиссер Семен Райтбург снял забавный короткометражный фильм «Математик и черт» с Александром Кайдановским в главной роли.

[19] Конечно, под словом "числа" Ферма, следуя древним грекам, понимает натуральные числа.

[20] Теорема, сформулированная без доказательства в 1637 году, действительно оказалась верна. Первое ее полностью правильное доказательство получил математик Эндрю Уайлс в 1995 году.

ло обусловлено попытками решить, доказать (или опровергнуть) Великую Теорему Ферма.

Работы Ферма дошли до нас, потомков, благодаря его сыну, который после смерти опубликовал всю его научную переписку, а также – «Комментарии к Диофанту» (на полях трудов Диофанта Ферма записывал разные пришедшие ему в голову (обычно, математические) вещи, не только Великую теорему).

Рисунок 11.2: Христиан Гюйгенс (1629 – 1695 гг.)

Или, вот, например, механик, физик, математик, астроном и изобретатель – Христиан Гюйгенс. Кто-то будет утверждать, что основной его вклад в историю математики в том, что он научил математике такого гения как Лейбниц (и да, это уже само по себе не мало!) Но на самом деле, именно он еще и основоположник теоретической механики, он же внес большой вклад в теорию вероятностей, в геометрию (и это не считая молекулярную физику, астрономию и часовое дело!), он же открыл кольца Сатурна и изобрел маятниковые часы. (Кстати, сам Гюйгенс увлекся математикой, потому что его отец был другом Декарта. /**Вообще, когда начинаешь разбираться кто из математиков у кого учился и с кем общался иногда такая Санта-Барбара начинается!**/)

Если бы эта книга просто рассказывала про историю математики, то мы должны были бы как минимум по нескольку страниц посвятить и блестящему Жерару Дезаргу, и остроумному Эвенджелисте Торричелли, никак нельзя было бы обойти вниманием ни Якоба Бернулли (другие Бернулли тоже выдающиеся, но были позже), ни Абрахама Муавра, ни Мишеля Ролля, а Кеплера и Галилея я чуть позже еще упомяну, и десятки, десятки других математиков XVII века обязательно занимают свое место в истории математики. Однако же, именно упомянутые четверо (Декарт, Паскаль, Ньютон, Лейбниц), вероятно, больше других изменили не только математику, но и окружающий их мир. А ведь именно про это я пытаюсь рассказывать. Не про математику, которая варилась в своем котле, а про математику и математиков, без которых окружающий нас сейчас мир не был бы таким, какой он есть.

Принципиальное отличие века XVII от всего Средневековья состоит в том, что в этом веке не просто решались задачи и доказывались теоремы (хотя уже это само по себе – хорошие, нужные вещи). В XVII веке складывались математические концепции, появлялись новые математические дисциплины, разрабатывались принципиально новые математические методы, сложилось представление о структуре математической науки вообще.

Какие же отрасли математики возникают в XVII веке? Математический анализ, аналитическая геометрия, математическая логика, теория многочленов и теория чисел – если приглядеться, это список математических дисциплин первого курса всех матфаков![21] [22]. В XVII же веке появляется и развивается теоретическая механика, теория вероятностей, вариационный анализ, и теории еще всякого по мелочи.

Таким образом, такая большая часть книги посвящается XVII веку во-первых, из-за того, что именно тогда проис-

---

[21] А что такое математика на первом курсе матфака? Правильно! Это самые основы, самая азбука высшей математики. Т.е. можно грубо сказать, что в 17 веке зародилась высшая математика.

[22] Вообще говоря, на первом курсе обычно еще есть линейная алгебра, которая появилась чуть позже, ближе к 19 веку. Ну, и программирование – его да, еще не было, но… предпосылки к возникновению программирования возникают именно в 17 веке тоже!

ходит много чего в математике. А во-вторых (и, возможно, в-главных), в XVII веке практически любая область культуры (философия, поэзия, изобразительное искусство, театр и т.д.) пропитана математикой. В умных книжках авторы это называют "математикоцентричность культуры".

Ни в какую другую эпоху математика не занимала в культуре такого важного места (даже в Древней Греции!)

А для того, чтобы проиллюстрировать эту мысль, обратимся к философии. Как ни странно, но список величайших философов XVII века, очень сильно совпадает со списком величайших же математиков. Декарт, Паскаль, Лейбниц – безусловно, в этом списке. И вот кого нет в списке математиков – нет блестящего философа и мыслителя Бенедикта Спинозы. Спиноза был отлично образован в области математики, дружил с Гюйгенсом, вращался в математических и околоматематических кругах[23], использовал математические знания для изготовления стекол для оптических приборов (чем и зарабатывал на жизнь), но математиком (и даже физиком) все же никогда не был, математических текстов не писал. Главный труд Спинозы – это его «Этика». А знаете ли вы ее полное называние? «Этика, доказанная в геометрическом порядке»! И что же мы видим, читая «Этику»? Она устроена действительно "в геометрическом поряд-

---

[23] Проще было бы сказать, что он вращался в высшем парижском свете. Тогда практически весь свет, все уважающие себя умные люди вращались в околоматематических кругах.

ка", т.е. в точности так, как «Начала» Евклида (кто забыл – см. главу 6)! Каждая глава начинается со списка определений, аксиом и постулатов, потом начинают излагаться теоремы. К каждой теореме обязательно есть доказательство (которые выглядят вполне стандартно "из теоремы 5 следует это и это; из теоремы 12 это, и поэтому получаем вот это") и "схолия" (пояснение, комментарий). Собственно, схолии намного интереснее, и как раз служат, чтобы убедить читателя. Написаны красиво, красочно и нередко апеллируют, к математическим аналогиям. Например, чтобы проиллюстрировать то, что «все идеи в мире содержатся в идее Бога, но не эквивалентны ему» Спиноза сравнивает Бога с кругом и хордами внутри него. Внутри круга есть хорды, но даже все множество хорд – не есть круг. Красиво!

11.1

Предпосылки
математического «взрыва» XVII века.

Историки очень любят выделять предпосылки разных исторических явлений, чтобы понять, "как же мы/они дошли до жизни такой"? Так вот, как и у любого процесса в истории, у математического взрыва тоже были свои предпосылки, которые делятся на три большие группы.

И первые предпосылки – внутриматематические. Главные достижения средневековой математики, как мы видели, в какой-то алгебре/арифметике (в отличие от античной математики, когда развивалась в основном геометрия). Решалось много задач прикладного характера (из торговли, астрономии, архитектуры). Во многом, задачи были особенно сложны тем, что отсутствовал четкий механизм математических обозначений. Все пересказывалось словами, без формул! Вот попробуйте сами перечитать главу 10.1 про кубические уравнения – только представьте, что она без формул, а все пересказано словами. По возможности я стараюсь избегать в этой книге изобилия формул и прочих математических значков, стараясь все рассказать нормальным человеческим языком[24] – но в некоторые моменты у меня просто не получается! И с формулами повествование выглядит на-

[24] надеюсь, вы это оценили

много понятнее даже человеку далекому от математики!

Так вот, в конце XVI века появляются математические обозначения!

А кто молодец? Виет молодец! Франсуа Виет в своих математических работах второй половины 16 века придумывает математические обозначения. Они еще не совсем такие, как современные – но почти, и они несомненно гигантский шаг вперед, и гигантское облегчение жизни всех математиков.

Итак, в течении долгого-долгого Средневековья, математика накапливает много разрозненных фактов. Однако же, она настолько трудна (и эти трудности в основном технические) – что синергия не наступает, из отдельных фактов не сплетается полотно математической науки. А с обозначениями Виета – да! Теперь все готово к созданию новых математических наук: теории чисел, аналитической геометрии (науки, которая и состоит в том, чтобы геометрические картинки перевести на "алгебраический" язык), математического анализа (в котором и так-то черт ногу сломит, а без обозначений вообще продвинуться никуда было нельзя) и так далее.

Рисунок 11.3: Франсуа Виет, 1540–1603 гг.

Вторая часть предпосылок – естественнонаучные.

XVII век называют не только веком "математического взрыва", но и "эпохой научных революций", имея в виду огромный прорыв в естествознании, особенно в физике и астрономии, причем прорыв этот начался даже раньше математического, во второй половине предыдущего, шестнадцатого, века.

Например, к концу XVI века относится формулировка Кеплером его законов астрономии.

Вообще, Кеплер был в чем-то похож на Кардано. Верил в свои супер-силы, верил во многое сверхъестественное или антинаучное. Или придумывал безумные теории (и был стопроцентно в них убежден!).

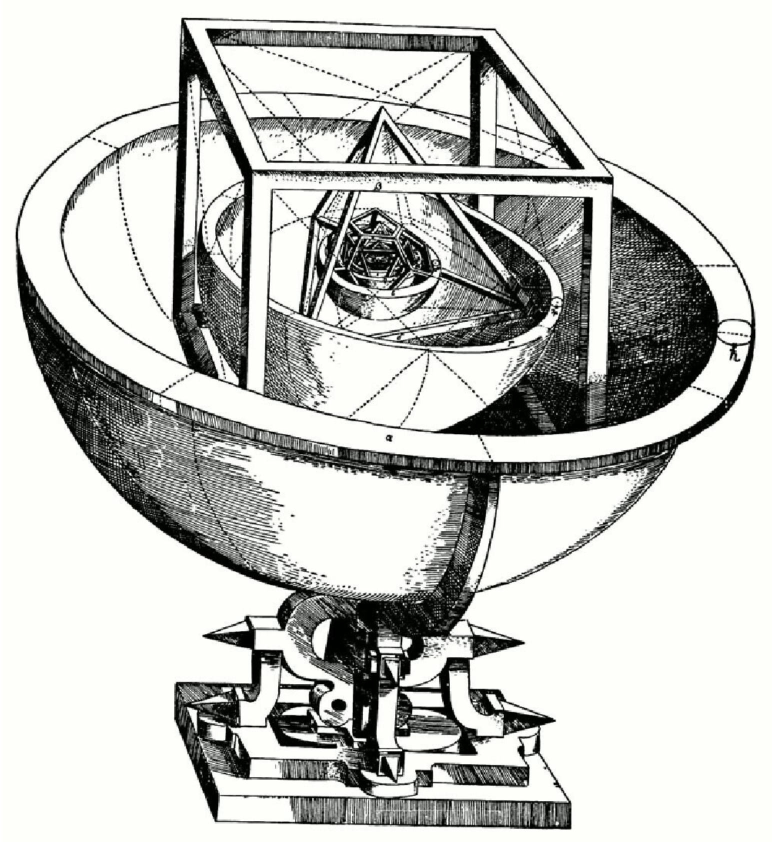


Рисунок 11.4: Кубок Кеплера.

Например, в те времена хотя и не были вычислены орбиты планет, но было вычислено, во сколько раз одна планета дальше от Солнца, чем другая. И вот, Кеплер, зная, что существует ровно 5 платоновых тел и ровно 6 планет[25], анализируя числа, заметил интересное. Что некоторые числа относятся друг к другу примерно как в некотором порядке рассмотренные платоновы тела. И придумал, что Солнечная система устроена так. Берем сферу описываем около нее октаэдр. Вокруг этого октаэдра (а каждое платоново тело одновременно и вписано в сферу и описано вокруг сферы) описываем сферу. Вокруг второй сферы описываем икосаэдр. Вокруг него снова сферу. Потом додекаэдр, потом тетраэдр, потом куб. Пять платоновых тел, 6 сфер. Самые интересные многогранники внутри, самые простые снаружи. Так вот, если всю эту конструкцию через общий центр разрезать плоскостью – то радиусы полученных кругов относятся примерно (с большой неточностью, но примерно) так, как дают наблюдения за планетами. Т.е. можно предположить, что Солнечная система устроена как-то так. Очень математически. Такая конструкция называется "Кубок Кеплера" (см.рис.11.4). Кубок Кеплера в итоге оказался неправильной идеей (хоть и красивой).

Поэтому лучше вернемся к законам Кеплера. Эти законы можно сформулировать человеческими словами, но точнее будет сделать это на языке чисел, на языке математики.

/**Три закона Кеплера, если кто забыл, таковы:*

Каждая планета Солнечной системы движется по эл-

[25] Дело в том, что в те времена Уран и Нептун (и Плутон, если угодно) тогда еще не открыли. Поэтому действительно считалось, что планет ровно 6.

липсу, водном из фокусов которого находится Солнце.

Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца. За равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, заметает равные площади.

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся друг к другу как кубы больших полуосей орбит планет. */

/**Кеплер свои законы не доказал, только сформулировал. А доказал их позже Ньютон, выводя их как следствие из открытого им Закона Всемирного Тяготения.* */

Древним грекам и в голову не могло бы прийти, что величественная планета движется не по идеальной фигуре (по окружности), а по какому-то жалкому эллипсу (эллипс, кстати, в переводе с греческого вообще обозначает "недостаток"). Но Кеплер показал, что его законы подтверждаются эмпирически. И эмпирически лучше подходят, чем более красивые идеально круглые орбиты.

Именно с Кеплера стало повсеместно понятно, что сформулированные физические законы не должны удовлетворять какой-то абстрактной красоте или идеальности – а должны подтверждаться эмпирически.

/*

Ой, а еще, а еще про Кеплера есть забавный факт. Одна из последних его научных математических работ называется "Геометрия винных бочек", где он исследует идеальную форму, собственно, винных бочек. И ищет объем вот таких вот странных бочко-образных конструкций (в зависимости от радиусов и высоты). Напоминаю, что в те времена интегрировать-то еще не умели. И потому работа была, конечно, блестящая. Это сейчас бы мы просто с помощью интеграла быстренько как упражнение для первокурсников посчитали объем тела вращения. А тогда все было ой как непросто! Нескучные у Кеплера были идеи! И не настолько дурацкие, как в абзаце про кубок Кеплера.

*/

Но еще лучше для иллюстрации "естественнонаучной предпосылки" подходят работы Галилео Галилея. Галилей и Кеплер, кстати, были современники, примерно ровесники, много общались на научные темы.

Первая из знаменитых задач Галилея: какую траекторию опишет тело, брошенное под углом к горизонту. Именно он обосновал, что это будет парабола (а дальше переоткрыл факт о том, что максимальная дальность стрельбы достигается под углом $\frac{\pi}{4}$ к горизонтали, исходя из параметров параболы и строго математически). Именно Галилей первым обнаружил, что парабола – не просто математическая кривая (как сечение конуса ее уже изучали древние греки и позже арабские математики), но что парабола постоянно встречается в природе! Значение этого открытия Галилея то же, что и у Кеплера: природа говорит на языке математики!

Галилей описал и рассчитал движение маятника (позже Гюйгенс с помощью этой теории придумал маятниковые часы). Галилей изучал свободное падение тел. И в частности доказал, что тела разного веса и разной плотности в одной среде падают с одной и той же скоростью. То есть скорость падения не зависит от веса тела (как считалось до этого). /*
По этому поводу даже есть известный анекдот, что для этого он с пизанской башни сбрасывал пушечные ядра. */

А в математике известен парадокс Галилея: натуральных чисел столько же, сколько полных квадратов, хотя большинство натуральных чисел полными квадратами не является

26

27

Короче говоря. К концу XVI века был очень высок пре-

[26] Полный квадрат (или квадратное число) – это натуральное число, являющееся квадратом другого натурального числа. Например, 4, 9, 81 – полные квадраты; а 8 – нет (зато это полный куб). А, например, 17 – и не квадрат, и не куб.

[27] Напомню, это было еще задолго до знаменитых апорий Кантора о счетной гостинице, и вообще до изобретения всех этих бесконечностей. В 17 веке с бесконечностями работали очень плохо и неаккуратно. Ну, короче, фактически не знали еще такого понятия.

стиж естественных наук и важности научных исследований. Да. А Галилей и Кеплер (и другие тоже) убедили весь мир в том, что "Природа говорит на языке математики". И уже потому математику изучать надобно.

Третья группа предпосылок, как ни странно, религиозные.

Математика XVII века отличается от математики более ранних эпох тем, что в это время в математике начали появляться не просто теоремы, а целые теории. Аналитическая геометрия, анализ бесконечно малых, теория вероятностей, математическая логика. Почему-то развитие математики до сих пор этого не подразумевало. Никакие практические задачи не требовали от математиков большего, чем создание единичных теорем или методов. Но тут что-то произошло. Что же?

Пьер Шоню [41], Альфред Уайтхед [54], Бертран Рассел [53], да и большинство других философов и историков науки, которые задумывались над этим вопросом, связывают развитие математических теорий в XVII века с кризисом религии, в котором на тот момент пребывала Европа. Математики XVII века все – люди глубоко верующие. Но в связи с расколом церкви они утратили точку опоры, и попытались обратиться к такой области знания, которая их не подведет. Которая содержит настолько четкие критерии истинности, что неверной или зыбкой быть не может. Математика если не спасает мир от падения в тартарары, то по крайней мере, дает устойчивую опору в то время, когда он туда-таки катится. Математики-создатели великих теорий пытались не просто ответить на какой-либо частный практический или умозрительный вопрос (как обычно бывало раньше), но пытались в своих работах объяснить вообще, как устроен мир. Именно поэтому среди них так много философов.

Размышляя о математике, мы очень скоро приходим к мысли, что математика – мир идеальный. Мир идей, а не вещей. Математика оперирует понятиями, недоступными эмпирическому восприятию. Нельзя потрогать бесконечную идеально прямую линию. Нельзя понюхать число 2. Есть две руки, две ноги, двойка, написанная на листе бумаги. Но числа 2 – нет. Бесконечно малые? Что это вообще такое, где это встречается в природе? Нигде. Не зря, пытаясь рассуждать о бесконечно малых, древние греки не получали математический анализ, получали лишь парадоксы и "апории". Никаких бесконечно-малых в эмпирической реальности не бывает! А в математике – бывает. Но ведь Бог, о котором рассуждает религия, точно также не присутствует в эмпирическом мире. И вместе с тем, глубоко верующий человек может увидеть бога в делах добрых и справедливых, и дьявола в бедах и горестях. (Точно также как математик может увидеть число 2 за двумя носками, двумя перчатками или целующейся на берегу парочкой.) Без такой платоновской веры в первичность идеи над материей не работает ни математика, ни религия.

В 1517 году в немецком городке Витенберге монах Мартин Лютер прибил к дверям замковой церкви свой знаменитый список из 95 тезисов.[28] И началась Великая Реформация, расколовшая христианскую церковь на католическую и протестантскую (лютеранскую). На протяжении всего XVI века популярность учения Лютера растет. Вскоре, учение распространяется в половине Европы. Германские государства, Швейцария, Англия, Голландия, некоторые регионы Франции, Швеция – позже это приводит к жесточайшим религиозным войнам. К 1570 году примерно половина населения Европы стали протестантами.

Только через 30 лет после начала Реформации, католическая церковь разрабатывает систему мер, пресекающую отток верующих от католицизма к протестантизму. По современным меркам, сказали бы, что католическая церковь разработала маркетинговую стратегию. Нас в ней больше всего интересует пункт про образование. Церковь призвала монахов заняться образованием и просвещением. Мы уже обсуждали в главе 9, что именно монахи[29] были самой образованной частью населения. Да и большинство сохранившихся книг, как античных так и новых текстов, хранилось

---

[28] Самый известный из тезисов состоит в том, что никакой человек, даже сам Папа Римский, не может даровать отпущение грехов. Ни исповеди, ни аккуратное хождение на все мессы, ни щедрые пожертвования церкви не могут отправить человека в Рай. В Рай его может отправить только Господь Бог за искреннюю веру и праведные поступки

[29] Кстати, монахов протестантизм отрицает. Т.е. в Европе если речь идет про монахов – то это католические монахи. И католические же монастыри.

именно в монастырях. Но ранее монахи не слишком-то рвались делиться своими знаниями. Иногда проводили научные изыскания. Редко преподавали в университетах. Но большую часть времени – проводили взаперти в монастырях и молитвах. Но к началу XVII столетия появляется новый тип человека религиозного: монах, характерный своими активными действиями. Попытками воздействовать на культуру и общество. Тут можно вспомнить, например, духовника кардинала Ришелье, монаха-капуцина отца Жозефа, вошедшего в историю под прозвищем "Серый кардинал" (что впоследствии стало нарицательным понятием), который очень активно участвовал в политических делах Франции, оставаясь монахом.

А нас сейчас интересует не менее знаковый человек в истории (а для математики так и более), и тоже монах – Марен Мерсенн. Образ затворника-монаха, проводящего все свои дни в молитвах и за изучением Библии, не подходит Мерсенну совсем! Монах Мерсенн (действительно, почти не покидающий стены своего монастыря Пале Рояль в Париже) становится одним из самых известных людей своего времени! Позже историки назовут его "генеральным секретарем ученой Европы". Мерсенн сам занимался науками, но высот не достиг, однако же он организовал общение всех ученых. Как сказали бы сейчас, он организовал научный

минар.

Рисунок 11.5: Марен Мерсенн (1588-1648).

Во-первых, если кто-то из ученых приезжал в Париж – он приходил к Мерсенну. Послушать научные доклады других ученых, и обязательно доложить о своих! Во-вторых, если ученые хотели обсудить какой-либо вопрос с кем-то, занимающимся исследованиями в той же области, можно было написать письмо Мерсенну, и он находил адресата, и пересылал письмо куда надо. В-третьих, если какой-то уважающий себя ученый делал открытие, он посылал подробное описание открытия (как сейчас бы сказали: "оформлял научную статью") Мерсенну. Мерсенн эту статью размножал и рассылал всем ученым, которые занимались изысканиями в той же области. Научный журнал, когда еще журналов не было)))

Именно из научного семинара (первого в истории науки!), проходящего в скромной келье отца Мерсенна, где ученые всей Европы докладывали свои новейшие результаты, постепенно появляется первая в Европе Академия Наук – Парижская Академия наук (после смерти Мерсенна, король превращает ее в государственное учреждение, берет на государственный контроль и баланс).

Один человек покрыл вот такой "научной социальной сетью" всю Европу! Создал то, без чего современная научная работа не представляется возможной: научное общение. Невероятно.

Кроме того, что католическая церковь настойчиво попросила своих служителей просвещать народ, она организованно и целеустремленно открыла школы. Этим занимался Орден Иезуитов. В Иезуитских школах учили не только и не столько слову божьему, как всем наукам. И чтению/литературе, и стихосложению, и математике, и физике, алхимии, биологии/медицине. В общем, всем наукам. И мало того, что в школах образование было бесплатным (хотя как и все институты церкви, такие школы существовали на добровольные пожертвования прихожан), монахи специально искали среди неблагородных людей детишек, способных к обучению. Именно так попал в школу, а потом и в Университет (в Сорбонну!) Марен Мерсенн, простой крестьянский сын. И именно в такой иезуитской школе у Мерсенна появляется его лучший друг на всю жизнь – математик и философ Рене Декарт.

Лекция 12

.

Рене Декарт

Рене Декарт – один из величайших математиков всех времен. Один из тех, кто создавал из античной математики уже то, что мы (математики) понимаем под словом "математика" сейчас. Вместе с тем, он блестящий философ. И эти две его ипостаси разделить нельзя. Это две стороны одной монеты. Как математика Декарта перевернула полностью представление людей о математике, так и философия Декарта до сих пор остается актуальной.

Родился Декарт в 1596 году на юге Франции в богатой и уважаемой семье. Мать его умерла родами, а сам Декарт выжил чудом. С детства и на всю жизнь он был болезненным (как и многие гении того времени), что не мешало ему, впрочем, и превосходно владеть шпагой, и воевать, и вообще.

Декарта отдали учиться в Иезуитский колледж[30], где он познакомился с Мареном Мерсенном, который станет его лучшим другом на всю оставшуюся жизнь. Декарт – блестя-

[30] Кстати, штришок про иезуитские колледжи. В колледже узнали, что Декарту тяжело рано вставать – и не заставляли его делать это. Он всегда просыпался к обеду. Когда однажды в жизни ему пришлось-таки вставать рано (на службе у Шведской королевы Христины), Декарт за полгода зачах и умер.

щий ученик, ему даются все науки, и никто не сомневается, что Декарт посвятит свою жизнь науке. Кроме… самого Декарта. Сам же Декарт пишет (в своих "Рассуждениях о методе"), что был так хорош в науках, и так блестяще в них разобрался – что только больше запутался, и в конце концов достиг лишь одного: понял, что ничего не понял. Риторика (по мнению Декарта) не может быть наукой, ибо в риторике может быть более хорош тот, кто никогда ее не учил. Богословием заниматься не обязательно: путь к Богу открыт одинаково как сведующим, так и невеждам. В философии вопросов больше, чем ответов. И столько мнений, сколько людей. А с настоящей наукой подобного быть не может, ибо должны быть критерии истинности, и не могут быть одновременно истинны два противоположных мнения.

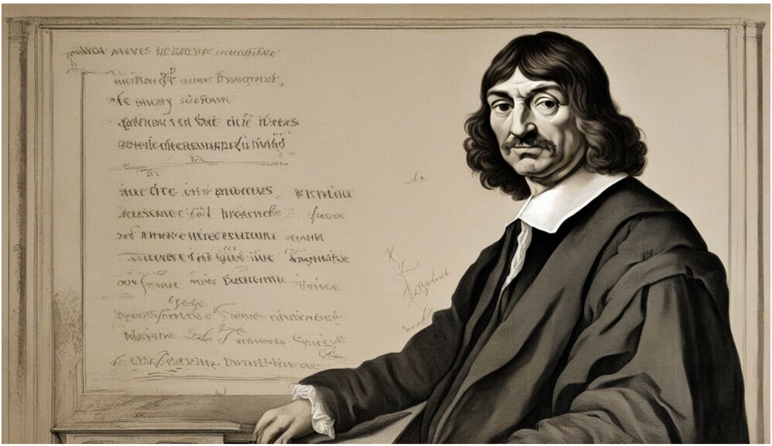


Рисунок 12.1: Рене Декарт. 1596-1650

Настоящая наука (по Декарту) должна быть, во-первых, полезной в жизни (в широком, а не в вульгарном смысле этого слова). При этом, точной и неопровержимой в выводах. Да, математика, почти такова. Но с ней тоже все не до конца хорошо. Математику Декарт считает "мелковатой". Считает, что математика решает конкретные задачи, т.е. полезна именно что в вульгарном смысле. Наука "ремесленника", а не "художника и творца". И да, это интересно, но нет того размаха и ширины, как в настоящих, правильных науках, которые познают мир.

Таким образом, юный Декарт считает, что надо не заниматься науками, а познавать мир созерцательно. Жить в мире, изучать его, наблюдать за миром, как он сам же пишет "собрать разнообразный опыт".

Итак, окончив иезуитский колледж в 1612 году, Декарт не продолжает свое обучение, а просто живет в Париже обычной светской жизнью молодых знатных людей того времени. Он поддерживает знакомство с Мерсенном, посещает его семинар, но в рамках той самой "обычной светской жизни" образованный элиты общества.

В 1614 году Мерсенн уезжает из Парижа. И Декарт, заскучав, покидает Париж тоже. Уединяется в парижском пригороде, практически ни с кем не общается – и занимается математикой! В основном, в этот период Декарт решал разные задачи, связанные с азартными играми (то есть, с точки зрения математики правильно говорить: задачи из теории вероятностей).

Желание Декарта наблюдать за миром в 1617 году приводит к тому, что Декарт поступает на службу в голландскую армию. Первое время, образ его жизни в армии мало отличается от того, к чему он привык. Но через два года ему удается "собрать разнообразного опыта" выше крыши: начинается Тридцатилетняя война.

Рисунок 12.2: П.Снайерс. Белогорская битва

(эпизод Тридцатилетней войны)

Тридцатилетняя война – одна из самых жестоких и смертоносных войн в истории Европы. Первая война, затронувшая все европейские страны (в том числе, и Россию, кстати). Поэтому в каком-то смысле, непонятно, почему не ее назвали "Первой мировой".

Во многих литературных произведениях того времени и много позже (аж до Второй мировой) Тридцатилетняя война показана как эталон жестокой войны. Преимущественно военные действия проходили на территории современной Германии. По оценкам на юге Германии после войны в живых осталась треть населения (не только от прямых военных действий, но и в связи со связанными с войной голодом, эпидемиями и т.д.).[31]

Итак, начинается Тридцатилетняя война, и Декарт идет на фронт, в Венгрию, в Чехию. Участвует в очень тяжелом пражском сражении. Очень быстро Декарту перестает казаться, что для обретения мудрости нужно набраться еще эмпирического опыта. То ли опыта уже достаточно, то ли опытным путем установлено, что опыт – не есть путь к мудрости.

Во время своей не очень продолжительной военной карье-

---

[31] В 1938-1939 году гениальный немецкий драматург Бертольд Брехт написал пьесу «Мамаша Кураж и ее дети», пьеса как раз о Тридцатилетней войне, и призвана напомнить немецкому народу про ужасы войны. Тем самым Брехт пытался предотвратить то, что, как мы знаем, предотвратить у него не получилось. Пьеса увидела свет лишь в 1941 году, когда было уже поздно. По этому поводу Брехт высказывался так: "Писатели не могут писать с такой быстротой, как правительства развязывают войны: ведь чтобы сочинять, надо думать."

ры Декарт понимает, что истину надо искать не вне, а внутри себя самого. И формулирует "Четыре принципа рационального мышления", которые становятся для него самого не только правилами мышления, но правилами всей жизни.

Считать истинным только то, что с очевидностью является таковым. Стремиться к незамутненной ясности.

Разделять каждую проблему на столько частей, на сколько возможно и необходимо для ее решения.

Располагать свои мысли в определенном порядке, начиная с простейших. (Даже если исторически это не так)

Делать повсюду перечни настолько полные и обзоры столь всеохватывающе, чтобы понимать, что ничего не упущено.

*/*Однажды, когда я на лекции рассказывала эти правила мышления Декарта, студенты заметили, что они очень похожи на правила хорошего программиста.*

Сам понимай, что ты написал!

Пиши подпрограммы! Если что-то можно выделить в подпрограмму – это нужно выделить в подпрограмму.

Сначала напиши рабочий код, потом полируй, улучшай и оптимизируй.

Комментируй код!

Ну, может, и не один-в-один, но студенты будущих лет тоже были согласны с подобным свежим прочтением[32]*. */*

---

[32] Поскольку, я считаю, что аналогия не на 100% идеальна, я бы хотела услышать ваши идеи, как сделать ее более идеальной. Можно писать мне на почту katpop@yandex.ru с предложением более удачных переложений принципов Декарта на принципы программирования.

Основной принцип тут для Декарта, пожалуй, первый. Нужно стремиться к полной ясности, понятности. Декарт под эти принципы подводит не только свою математику и философию, но и жизнь в целом. Например, в одном из своих писем он отвечает Королеве Швеции, Христине (с которой вел длительную переписку), что он думает о любви.

Так вот, в понимании Декарта любовь тоже есть ясная – духовная, и неясная – чисто чувственная. И та, и другая основаны на влечении. Но в первом случае, влечение это сопряжено со стремлением познать того, кого ты любишь (то есть, с некой интеллектуальной активностью и стремлением к ясности). А во втором же случае, когда любовь неясная и чувственная, объект любви как личность попросту исчезает из поля зрения.

Следующие 8 лет (после участия в Тридцатилетней войне) Декарт проводит во Франции. Чередует буйную светскую жизнь и уединения. Декарт далеко не затворник, а человек очень общительный. Но как только "поперла мысля" – ему надо уединиться и думать, думать! Во время таких уединений он обрывал все связи (для полной ясности, чтобы никто не мог помешать), брал с собой только одного преданного слугу, и о том, где он находится, знал только лишь один Марен Мерсенн.

Рисунок 12.3: Анри-Поль Мотт. Кардинал Ришельё на осаде Ля-Рошели.

Но такие уединения не так уж часты. А в перерывах – салоны, тусовки, семинар Мерсенна, и даже одна военная кампания. В 1628 году (Декарту 31 год) Декарт принимал участие в осаде главной гугенотской крепости Ла Рошель. (Известный советский фильм про трех мушкетеров заканчивается пикником, который мушкетеры устраивают во время осады). Так вот, этот поход был "высоконаучным", применялись новейшие осадные машины. Руководил этим предприятием (с научноинженерной точки зрения) знаменитый замечательный математик Дезарг (математик, архитектор, механик и изобретатель), но также требовались и другие ученые, в числе которых был и Декарт.

В 33 года Декарт снова покидает Францию на много-много лет, переезжает в Голландию. Причина? Главный принцип (принцип ясности) выработан уже довольно давно. Но при этом никакой новой математики и новой философии он так и не построил! Разменивается на мелкие задачки. Поэтому нужно гораздо более длительное уединение. В Голландии, где люди не такие общительные и темпераментные, как во Франции, а скорее прагматичные и деловые, можно жить так, чтобы на тебя не обращали никакого внимания. Практически, в уединении.

Через несколько лет (в 1637) Декарт выпускает свою первую великую книгу «Рассуждения о методе», которая выходит с тремя приложениями «Диоптрика» (о зрении и физических принципах работы глаза); «Метеоры» (физика атмосферных явлений) и «Геометрия». Позже выходят «Начала философии» (по-современному такая книга должна бы называться «Основы физики»). Именно в этих книгах Декарт строит и новую философию, и новую математику.

Шведская королева Христина, которая славится своим стремлением к наукам, зовет Декарта в Швецию. Помогать открывать академию наук и впоследствии ее возглавить. Декарт принимает приглашение, ожидая, что в Швеции заниматься наукой будет не хуже, чем в Голландии. Однако же, проживет он в Швеции не так долго – но проект устава Шведской академии наук успеет создать. Конечно, королева Христина на месте президента академии видит только Декарта. Но он сам своей рукой вносит в Устав первый пункт: "Иностранец не может быть президентом". Так он чувствует, и только так можно достичь полной ясности, поступить иначе он считает бесчестным.

12.1

Философия Декарта

Философия Декарта – штука, конечно, очень-очень сложная, но настолько важная в культурно-философском плане, что даже дошла до мемов в интернете. Я мыслю, следовательно, я существую. Cogito ergo sum.

Я читаю книгу – следовательно, я существую. Ну, логично, ведь несуществующая личность не может читать книгу! Я пью кофе – следовательно, я существую. Так? Смысловая конструкция такая же?

Нет!

Рисунок 12.4: Пьер-Луи Дюмениль. "Диспут Декарта и королевы Кристины". Фрагмент картины.

В философии Декарт, как и во всем, во главу угла поставил принцип ясности. Все должно быть ясно. И какие же есть принципы, на которые мы можем опереться? Какие есть вещи, самоочевидные?

В XVII веке становится популярна такая идея: "А не сон ли все вокруг?" Как вы можете быть убеждены, что книга, которую вы вот прямо сейчас читаете, существует? А может ее нет, а она вам только снится? Века 18 и 19 были намного более рациональны в этом смысле, никто не ставил себе вопрос: "а есть ли мир вокруг?". А вот к середине XX века у нас снова появляется это сомнение: в кино, в литературе, в философии. Поэтому оно не кажется нам непонятным (мы можем ставить себе этот вопрос или не ставить; можем верить в существование объективного мира вокруг нас или не верить; но мы понимаем этот вопрос). Как мы можем быть уверены, что мир вокруг не порождение нашего разума? А кто я сам? Может быть, мыслящий осьминог или искусственный интеллект, возомнивший себя человеком? И вообще, существую ли я?

Так вот, фраза Декарта "Я мыслю, следовательно, я существую" – это не простенькое упражнение в логике, это строгое доказательство своего существования. Если я мыслю – значит, в каком-то виде я существую. Может быть, я коллективный разум колонии крабов, может быть, я ChatGPT, ищущий свою индивидуальность. Но я точно есть, потому что кто-то же мыслит. Если только мелькает сомнение в существовании – это уже мысль! и значит, я уже существую.

Я могу не читать книгу. Я могу не пить кофе (но это не точно). Так мое существование не докажешь. Но я не могу не мыслить. А раз мыслю – значит, я есть.

По-моему, это гениально. И очень ясно, почему же я существую.

Ну, и дальше мы имеем одну уже доказанную теорему. И можем выводить все новые и новые.[33]

[33] Как и устроена потом "Этика" Спинозы. Кстати, возможно, именно из-за этого базового доказательства Декарта существование "себя" Спиноза считает аксиомой, а факт "Бог существует" у Спинозы заявлен как теорема. С доказательством, все как положено.

12.2

Геометрия Декарта

Чем же более всего знаменит Декарт в математике? Пожалуй, декартовыми координатами, созданием аналитической геометрии.

До XVI века включительно математика развивалась очень неоднородно. Геометрия была на очень высоком уровне. Были доказаны мириады очень сложных теорем (многие из которых потом были забыты и доказаны снова). Что же тут не устраивает Декарта? У геометрии почти нет методов. Почти каждая задача требует индивидуального подхода. Так много задач не нарешаешь. Ну, и вообще: нет никакой ясности, как же подступаться к геометрическим задачам? Как придумывать новые?

Алгебра до середины XVI века была ужасна. Тоже совершенно неясна! Алгебра без алгебраических обозначений? Это мрак. Но в алгебре как будто есть методы. Но … в алгебре больше ничего нет. А кроме того, алгебра не наглядна, в ней очень сложно следить за мыслью и за рассуждениями. Приходится постоянно помнить весь объем предыдущих вычислений. И вот, Декарт соединяет алгебру с геометрией. Все геометрические картинки теперь можно описать числами и уравнениями. (А дальше с ними работать). Но верно и обратное. Никто про это не задумывается, но теперь и задачи аналитические (не геометрические) можно снабдить картинками. Яркий пример – графики функций. До Декарта такого понятия не существовало. Про функции (т.е. зависимость какой-то одной величины от другой) математики уже знали, а графики? Графиков не было. А ведь графики – это 99% успеха, без них никакой мат.анализ (который уже в послеследующей главе появится в нашей книге) понять и тем более развивать было бы невозможно!

Ну, и вот это все придумал Декарт. Он визуализировал аналитические задачи, и он же алгебраизировал геометрию. Свел ее к (возможно, скучному) но имеющему метод набору уравнений и формул. И все это – опять же для того, чтобы придать ясности и Алгебре, и Геометрии. Ясность нужна во всем!

И да, конечно же, с помощью своего метода, для пущей ясности, он показал, как можно доказывать задачи, которые раньше никто не решал. (Ну, например, он решил задачу Паппа. Из античности было известно следующее: вот есть две прямые. Где находятся точки, которые на одинаковом расстоянии от первой и от второй прямой? Это известно со времен Евклида точно, а то и раньше. А дальше еще древнегреческий математик Папп придумал обобщение. Вот есть четыре прямых (первая, вторая, третья и четвертая). Вычислим от точки сумму расстояний до первых двух и второе число – сумма расстояний до вторых двух. Где находятся точки, что эти две суммы совпадают? Декарт решил эту задачу с помощью метода координат).

Этот метод, который связывает алгебру и геометрию, придает математике целостность – целиком заслуга Декарта. Именно поэтому я и пишу в начале главы, что с Декарта начинается современное понимание математики как науки. Раньше можно было думать, что это две разных науки: алгебра и геометрия (а то и не две, а больше). Но после Декарта очевидно, что математика – одна на всех, единственная, связная, целостная.

Лекция 13

.

Блез Паскаль

Помните Декарта? Декарт для того, чтобы разобраться в проблеме, должен был долго и без помех обдумывать ее со всех сторон. Именно отсюда его длительные "уединения". Но именно отсюда же у него такие невероятно глубокие результаты из, казалось бы, банальной идеи тождественности числа и точки. Главные результаты жизни у Декарта появляются ближе к зрелому возрасту. Потому что идеи надо хорошенько обдумать.

Рисунок 13.1: Блез Паскаль. 1623–1662

Паскаль обладает кардинально другим стилем мышления. Ему не интересно систематизировать, составлять каталоги и добиваться предельной незамутненной ясности до последней точки. Мышление Паскаля взрывоподобно. Он выдумывает одну идею. Предельно понятную, когда она уже озвучена, но как до нее догадаться? Никак! И все, у него рождается новая теорема, новая теория, новая отрасль математики или физики. Такая идея не плод кропотливого труда, а плод чего-то бессознательного. Такая идея приходит в голову одному на миллиард – и оказывается гениальной. Вот именно таким и был Паскаль.

Паскаль – физик и математик. Да? Да. Но кроме того, внезапно для математиков, и вовсе не внезапно для филологов, Паскаль – классический французский писатель. Например, Пикассо считал Паскаля одним из своих любимых авторов, наравне с Достоевским, Сервантесом и Мольером.

А еще Паскаль изобрел общественный транспорт. Вот как ездили люди раньше? Были люди богатые. Они передвигались или верхом, или на карете. Были торговцы, которые возили груз на телеге. В принципе, теоретически, можно было на эту же телегу попроситься и доехать автостопом из одного места в другое. Но обычно небогатые люди ходили везде пешком. Например, поэтому не могли доехать из одного города в другой. Если надо было Ломоносову попасть в Москву – это только с торговым обозом, пешком. Одинокому путнику идти на тысячу километров? Смерти подобно.

Паскаль на все это дело посмотрел-посмотрел, и понял, что нужны большие кареты. Кареты эти будут без роскошеств и излишеств, но крепкие и на увеличенной базе. Принадлежать они будут муниципалитету, будут установленные маршруты. И несколько остановок вдоль этих маршрутов. До остановок уже не так трудно дойти пешком. Паскаль придумал эскиз этих увеличенных карет, омнибусов, высчитал, сколько будет нужно тратить на амортизацию, на водителя, на прочие расходы – получил стоимость проездного билета (то есть, составил полный бизнес-план мероприятия). Пришел с этим прожектом в Парижскую мэрию, предложил – и проект претворили в жизнь! Первая поездка на общественном транспорте состоялась 18 марта 1662 года от предместья Парижа в его центр. Ну, а теперь общественный транспорт – это основа жизни больших городов и нашего общества. Представить себе жизнь без общественного транспорта невозможно. Например, университет, в котором я проработала 20 лет, находился на расстоянии 12 километров от моего дома. И это очень близко по меркам современной городской жизни. Но это невозможно себе представить в старые времена, без общественного транспорта. 5 часов в день тратить на дорогу? Невозможно!

Паскаль изобрел первый в мире арифмометр, то есть механический аппарат для выполнения арифметических действий. Первый скромный шаг к появлению сегодняшних компьютеров, смартфонов и микроволновок.

Арифмометр Паскаль изобрел в 19 лет. Его отец, юрист, должен был отвечать за бухгалтерию в Руане (считать налоги, пошлины, и прочее-прочее). Паскаль помогал ему в его вычислениях – и ему пришло в голову сделать для этого дела машину. Он изобрел механизм, который будет делать перенос единицы в следующий разряд. А кроме того, полностью собрал не только первый прототип, но довольно много арифмометров. Их и до настоящего времени в разных музеях сохранилось порядком[34].

Первые открытия в физике Паскаль начал делать в 10 лет. Но про его физические открытия вообще можно говорить бесконечно (и рекомендую по этому поводу книжку [40] – там много про Паскаля, про его биографию, намного подробнее, чем у меня, и интересно про его научные открытия).

А что с первыми открытиями в математике? Отец нашего героя Блеза Паскаля, Этьен Паскаль, был по профессии юристом, и человеком всесторонне образованным. В частности, он посещал семинар Марена Мерсенна, был знаком с Декартом, сам увлекался математикой (и даже сделал несколько математических открытий. Кривая "Улитка Паскаля" названа так в честь Паскаля-отца, Этьена). Мать Паскаля умерла,

---

[34] Про арифмометр Паскаля чуть больше технических особенностей вы услышите в главе 17, посвященной развитию информатики из математики.

рожая его сестру, когда Паскаль был совсем еще малышом. Сам Паскаль был очень хрупок здоровьем. Поэтому отец решил учить его всему дома, не отдавать в школу.

Иезуитские школы, где центральной идеей была комфортность для ученика, (помните, Декарта в колледже не заставляли вставать к первому уроку никогда?) – не нравились Паскалю-отцу. Он считал, что в образовании должен быть более строгий подход, а от ученика надо ждать максимального усердия и напряжения. Отец сам разработал программу для Блеза. Начиналось все с основ естествознания, истории, и некоторого курса типа "сравнительного языкознания". Уже потом, после "сравнительного языкознания" предполагалось изучение иностранных языков, и еще позже, лет с 15-16 (как считал Паскаль-отец) можно приступать к изучению математики. Книжные шкафы с книгами по математике Этьен держал

пертыми, он полагал, что математика может пагубно сказаться на несформировавшемся уме.

Однако, все пошло не по плану. Однажды (Блез был уже подростком, ему было лет 12), Паскаль-отец без предупреждения зашел в комнату сына и застал его за запретным занятием. Блез занимался математикой! Поскольку научные книги были заперты на ключ, он даже терминологии принятой не знал. Круг называл колесом, прямую – палкой. Однако при этом уже сам передоказал некоторые теоремы. Например, теорему о сумме углов треугольника (поверьте, это далеко не тривиальный факт!) Он рисовал на полу (мелом или углем) чертежи, а потом их тщательно стирал.

Надо отдать должное Паскалю-отцу. С этого момента он перестал запрещать сыну заниматься математикой. С 13 лет брал сына с собой на семинар Мерсенна. А в 1640 году выходит первая научная работа Паскаля (ему всего 16 лет) под названием "Опыт о конических сечениях", содержащая теорему, которую мы сейчас так и знаем под названием Теорема Паскаля – теорема о шестиугольнике, вписанном в произвольную конику[35]

К тому моменту Декарт уже опубликовал свою «Геомет-

[35] Тут хочется привести правильную математическую формулировку теоремы Паскаля.Возьмем окружность. Впишем в нее шестиугольник. Продолжим пары его противоположных сторон до пересечения. Получим три точки. Эти три точки лежат на одной прямой. Этот факт был известен еще древним грекам.А вот, что придумал Паскаль. Этот факт остается верным, если вместо окружности взять любое коническое сечение (эллипс, гиперболу, параболу).

рию» и весь научный мир носился с идеями аналитической геометрии. Однако же, Паскаль в своей работе ее не использует, а использует другие идеи (близкие к Теореме Дезарга). Дезарг, блестящий и остроумный геометр, был не столько математиком, сколько инженером и архитектором. Но, как ни странно, именно он пользовался для доказательства своих геометрических теорем оригинальными геометрическими приемами, а не вычислениями с помощью метода координат (чуть позже из этих приемов Дезарга возникнет отдельная область геометрии – проективная геометрия). Короче говоря, именно работы Дезарга оказали влияние на работы молодого Паскаля, а не работы Декарта. И кстати, наоборот: уже маститый ученый Дезарг не раз восторженно отзывался об этой, первой, научной работе Паскаля.

А вот Декарт повел себя в этой ситуации странно. Несмотря на ажиотаж вокруг новой блестящей теоремы, он не пришел на доклад, и работу не одобрял. Он думал и делал намеки, что не юный Паскаль изобрел новую теорему, а его отец. Он не верил, что будучи столь юным человеком, можно придумать столь блестящую теорему. А кроме того, он ясно заявлял: "Ну, да, новая теорема – это хорошо. Но в этой работе не чувствуется нового метода. Не чувствуется общего подхода! Нет никакой ясности". Действительно, факт, доказанный Паскалем, практически невозможно доказывать методами аналитической геометрии. Подход, такой общий, такой всеобъемлющий, предложенный Декартом, дал трещину (и внес полную неясность)!

В своих дальнейших работах Паскаль часто писал: "В моей работе нет ясности, но к ней я и не стремлюсь" – явно, его задело отношение Декарта, на тот момент уже именитого ученого, пожалуй, математика номер 1 во всей Европе. Нет, Декарт больше не проявлял неуважения к Паскалю. Но Паскаль, который всю жизнь писал много философских трудов, явно задетый этим первым знакомством с великим Декартом, очень много в своей философии уделял внимания уходу от декартизмов, неявной (или явной) полемике с Декартом.

Просто случилось то, о чем мы говорили в самом начале. Столкнулись два научных темперамента. Декарт, изобретающий что-то долго и методично. И Паскаль – с его взрывоподобными вспышками гениальности, но без видимого труда со стороны, без какой-либо методичности. Декарту было трудно поверить, что без методичности можно достигнуть хороших результатов.

В 24 года здоровье Паскаля сильно ухудшается. Врач предписывает Паскалю не перенапрягаться, побольше общаться и (представьте себе) вести светскую жизнь. И действительно, семья снова переезжает в Париж (из Руана, где они прожили 7 лет и где Паскаль изобрел арифмометр). В Париже Паскаль становится завсегдатаем салонов, несколько раз посещает двор, играет в азартные игры (в которые до тех пор не особенно играл) – короче, все как доктор прописал.

И там он знакомится с неким кавалером де Маре, чье имя вошло в историю математики, хотя по факту сам он математиком не был. Обычный праздный господин, де Маре занимался ничем и интересовался всем. В том числе, он же подошел к Паскалю с вопросом, который впоследствии известен всем математикам как «Первая задача де Маре»: сколько раз надо кинуть две игральные кости, чтобы вероятность того,

что хотя бы один раз выпадут "глаза змеи" (пара из двух единичек) была больше вероятности того, что они не выпадут ни разу?

Де Маре задачу, вроде, решил, даже несколькими способами. Но у него каждый раз получался разный ответ.

Паскаль задачу решил (Паскаль, конечно, решил ее правильно). По поводу этой задачи у него возникает переписка с еще одним великим математиком-современником, Пьером Ферма. Именно в этой переписке, как считается, закладываются основы будущей математической науки, теории вероятностей.

«Вторая задача де Маре» сложнее и интереснее (ее Паскаль с Ферма обсуждали дольше первой). Предположим, происходит игра в кости. Все участники сдают вначале игры свои равные ставки "в банк". Игра разбивается на несколько партий и для выигрыша банка надо набрать определенное количество побед в партиях. Вопрос состоит в том, как справедливо разделить банк, если игра не доведена до конца.

В современности, в игровых заведениях заранее оговаривают, что если игра не доведена до конца, то просто игрокам возвращаются ставки. Но это не выглядит справедливым! Ну, предположим, вы играете до 5 побед. В данный момент счет 4:0 в вашу пользу и приходится прервать игру. Довольно очевидно, что гораздо больше вероятность, что выиграете вы, а не ваш соперник, и поделить банк пополам было бы нечестно, да?

На самом деле, еще в 15 веке уже упоминавшийся Лука Пачоли рассматривал подобную задачу. Он предлагал делить ставки пропорционально выигранным партиям. Если счет 2:1 – делить в этом отношении. Но на счете 4:0 ведь очевидно, что это тоже несправедливо. У второго игрока еще остается шанс выиграть, первый игрок еще не выиграл всю игру – и почему же ему уже надо отдавать весь выигрыш?

Конкретный пример Паскаля (самый первый, с которого он начал рассмотрение) такой. 2 игрока ставят по 32 пистоли. Кто выигрывает 3 партии – забирает банк (все 64 монеты). Игру пришлось прервать на счете 2:1. Как надо поделить банк?

Рассуждения Паскаля таковы. Проведем в уме четвертую игру. Если выиграет первый, игра закончена, первый получает 64 монеты. Но с той же вероятностью победит второй. И счет станет 2:2 (при этом счете очевидно, что надо делить банк 32-32). То есть, первому игроку обеспечены 32 пистоли, а оставшиеся 32 он с равной вероятностью получает или не получает. Таким образом, в данном случае надо делить банк 48:16.

Аналогично Паскаль разбирает случай 2:0, а потом и обобщает свои результаты.

/**Для разминки попробуйте и вы, дорогие читатели, решить задачу сначала для счета 2:0, а потом в общем виде. Благо правильное решение для счета 2:1 перед вами.*

В общем виде задача формулируется так: игра ведется до N побед. Но игру пришлось прервать при счете $m : k$, где $0 \leq m,k \leq N$. В каждом раунде вероятность выиграть у первого и второго одинаковая. Как справедливо разделить призовой фонд? */

Примерно в то же время, в 1654 году Паскаль опубликовал одну из самых известных своих работ «Трактат об арифметическом треугольнике», который мы теперь знаем под названием «Треугольник Паскаля». На самом деле, треугольник Паскаля был известен в Древней Индии, а потом и арабским математикам. Потом он был переоткрыт в Европе в XVI веке (и Паскаль про это знал). Так что же нового в этой работе? В этой работе впервые в истории математики появляется принцип математической индукции в явном, незамутненном, привычном для нас сейчас виде.

В какой-то момент своей жизни Паскаль встречает монахов-янсенистов. И переселяется в монастырь Пор-Рояль (не принимает постриг, нет, просто живет там). Начинается его уход от занятий математикой, физикой и другими науками. В монастыре он пишет шедевр французской классической литературы – свои знаменитые «Письма к провинциалу», которые Бальзак называл "шедевром шутливой логики", а для Пикассо это вообще была настольная книга.

Самая последняя математическая работа Паскаля, посвященная изучению циклоиды, выходит в 1658 году. Паскаль да, почти не занимается наукой. Но однажды ночью он слишком сильно страдает от зубной боли. И чтобы заглушить боль – решает одну из нерешенных задач, сформулированных за несколько лет до этого Мареном Мерсенном. Писать памфлеты при жуткой боли невозможно, как уже выяснил Паскаль, а вот напряженная мыслительная деятельность боль заглушает.

/**Ваша покорная слуга проверяла – и да, в этом что-то* *есть. Действительно, решение математических задач притупляет боль. Только ни в коем случае не пытайтесь повторить это дома! И не экспериментируйте на живых людях!*/

Через 4 года после этого, Паскаль умер в возрасте 39 лет. После его смерти вышла его философская (так и не дописанная) работа «Мысли». Эти самые «Мысли», конечно, читали все образованные люди того времени и много позже. Великие русские писатели Тургенев, Чернышевский, Достоевский, Толстой восхищались Паскалем[36] – однако же, знали его как писателя, философа и мыслителя, но вовсе не как математика.

[36] И тому есть письменные подтверждения. Например, в книге Льва Толстого "Круг чтения" Паскаль упоминается в среднем на каждой второй-третьей странице.

Лекция 14

.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Представьте себе разоренную долгими годами войны страну. Тридцать лет тут шли военные действия. На десятилетия страну захватил голод. Да и страна не самая большая, крепкая и сильная в мире. На деле, это разрозненные независимые, а во многом и конкурирующие германские мелкие княжества. Это не Франция XVII века – крупнейшая и сильнейшая страна на континенте – как в двух предыдущих главах, центр науки и просвещения. Это не Англия, как раз становящаяся сильнейшей в мире морской державой. И даже среди германских государств это не крупная Австрия. Это – Саксония. Чтобы заниматься наукой, нужны деньги. И нужны люди, не занятые каким-то более насущным трудом. Наука не приносит прибыль сиюминутно, она приносит прибыль когда-нибудь, в дальнейшем. Очень возможно, в следующем поколении, а то и еще позже. Бедные государства не могут себе позволить заниматься наукой.

Ну, и вот в такой стране в 1646 году (Тридцатилетняя война идет уже 28 лет и закончится еще только через два года) появляется на свет Готфрид Лейбниц. Семья Лейбница не аристократическая, но профессорская: его отец – профессор философии морали (что бы это ни значило), его мать – дочь профессора юриспруденции. Семья очень образованная, очень грамотная. К сожалению, отец Лейбница умер, когда сыну не было и семи лет, но мальчику наняли хороших учителей. С 13 лет Лейбниц изучает логику – и невероятно ею очарован[37].

В 15 лет Лейбниц поступает в Лейпцигский университет. Он бы мечтал заниматься математикой, но в Германии это невозможно. Даже особо нет нужной литературы. Поэтому поступает он на юридический факультет. Его мечта – построить юриспруденцию по законам математики: с аксиомами, теоремами, строгими доказательствами. Лейбниц думает, как можно бы применить теорию вероятностей в суде. В 20 лет он заканчивает университет, становясь доктором права и идет работать политиком.

[37] Настолько, что теперь мы считаем именно Лейбница – основоположником такой математической дисциплины как "математическая логика".

Рисунок 14.1: Готфрид Вильгельм Лейбниц, 1646–1716 гг.

Политиком он был весьма интересным. Несмотря на его молодость, он предлагал и претворял в жизнь совершенно грандиозные политические проекты. Один из которых и привел его во Францию.

Суть проекта в следующем. Франция – крупнейшее, богатейшее и сильнейшее государство на континенте, что очень волнует германские княжества. Князь Майнца, на которого работал Лейбниц, придумал, что надо стравить Францию с Великой Османской Империей (тоже величайшей державой, подпирающей с Востока). Увязнув в этой войне, Франция, во-первых, ослабнет, во-вторых, ей точно будет не до Германии. И поручил дальнейшие "мелкие" детали проработать Лейбницу. Лейбниц разработал блестящий план военной компании по захвату Францией Египта. И отправился в Париж, представлять этот проект Людовику XIV. Документ был передан Королю-Солнце, а Лейбницу сказали ждать.

И он ждал. Забегая вперед, сразу скажу, что ни аудиенции у короля, ни даже ответа на свое письмо он не дождался. Хотя провел в Париже около 4 лет. Однако у этой истории было небольшое забавное продолжение. Чуть более чем сто лет спустя Император Наполеон Бонапарт, признанный гений военного ремесла, вероятно, обнаружил этот проект в дворцовых закромах – ведь военный поход Франции на Египет проходил ровно по этому сценарию. Наполеон, хоть и баловался на досуге математикой, но все же останется за пределами нашего рассказа[38].

---

[38] В математике есть теорема Наполеона (считается, что Наполеон Бонапарт лично впервые этот факт обнаружил и доказал). Теорема такая. Рассмотрим произвольный треугольник. На его сторонах вовне построим три равносторонних треугольника. Оказывается, что центры этих равносторонних треугольников также образуют равносторонний треугольник.Поскольку математиками принято

Так вот возвращаемся к Лейбницу. Лейбниц в Париже, ждет (не дождется) аудиенции Его Величества, и, конечно, идет на семинар Марена Мерсенна. Конечно, самого Мерсенна уже нет в живых, но семинар функционирует, более того, из семинара Марена Мерсенна выросла Французская Королевская Академия Наук [39]. И там Лейбниц знакомится с блестящим ученым (физиком, математиком, астрономом, изобретателем, механиком) Христианом Гюйгенсом [40]. В общем, Гюйгенс стал учить Лейбница математике. Не той математической азбуке, которую, конечно, Лейбниц как образованный человек знал, а настоящей, современной математической науке. Которую Лейбниц не знал совершенно, потому что в Германии не было никого, кто мог бы ему хоть что-то объяснить, не было литературы, не было ничего. (Лейбницу примерно 26 лет).

считать тех, кто внес (собственный) вклад в математику – Наполеона можно считать математиком.Кстати, если все три треугольника строить внутрь, а не вовне, то факт тоже останется верным.

[39] То есть, тем, что Мерсенн устраивал бесплатно по велению души, теперь устраивают специальные люди, которым корона платит жалование.

[40] Когда Декарт (помните Декарта?) жил в Голландии, он познакомился с отцом нашего Гюйгенса, Константином, и они даже стали друзьями. А сам Гюйгенс из Голландии переехал во Францию, где стал первым Президентом Академии Наук, то есть преемником Марена Мерсенна, другого друга Декарта. Вот такая математическая Санта-Барбара.

Первое потрясающее изобретение Лейбница на этом поприще – Лейбниц изобрел счетную машину. Во многом, это усовершенствование арифмометра Паскаля. Но машина Паскаля умела только складывать числа и вычитать, а Лейбниц научил механическую машину числа еще и умножать, делить и извлекать квадратный корень! (Но подробнее про счетную машину Лейбница я чуть позже расскажу в главе 17). Свою счетную машину Лейбниц показывает Английской Академии наук. Его мгновенно приняли в Академию и он стал академиком! Лейбницу в тот момент всего 27 лет.

А позже Лейбниц безумно заинтересовался тем, чем мало-помалу занимались все серьезные математики того времени: изучению кривых. Основных вопросов два: как строить касательную к кривой и как считать площадь под кривой. Как вы уже догадались – это основные вопросы математического анализа. И да, Лейбницу удается построить то, что тогда называли дифференциальное исчисление. В 1675 году он уже полностью разработал новую науку, а в дальнейшем занимался ее развитием и продвижением. По примеру семинара Мерсенна, он ведет широчайшую переписку (отсюда мы и знаем достоверно, что, например, "формула Лейбница" (формула дифференцирования произведения) в 1675 году уже существовала). Объем переписки Лейбница колоссальный, и всем он рассказывает про вновь открытый математический анализ. Вскоре, математики всей Европы уже про него знают, изучают его и придумывают новые теоремы. Цикл статей Лейбница, посвященных математическому анализу вышел в 1684-1686 годах, но к тому моменту уже вся Европа про математический анализ все знала. Кроме переписки, Лейбниц с удовольствием брал учеников внутри Германии (хотя продолжал служить на политическом поприще).

В письме к Лопиталю Лейбниц писал: «Хорошее наследство лучше любой самой красивой проблемы геометрии, так как оно играет роль общего метода и позволяет решить много проблем.» Неужели же Лейбниц ценил деньги выше геометрии (и именно поэтому работал не геометром, а политиком)? Вовсе нет! Но Лейбниц ценил общие методы. Как Декарт стремился к ясности, так Лейбниц стремился разработать единый метод для всего. В частности, его вклад в математический анализ, произрастает отсюда же. Действительно, математический анализ (который, кстати, никак не мог возникнуть без идей Декарта) – это очень мощный математический метод. И на первый взгляд кажется, что он подходит практически для любых задач. Для физики, для химии, для биологии, для самой математики. Как только есть какая-то закономерность (т.е. функция) – так сразу ее можно анализировать (и возникает мат.анализ).

Еще одно из следствий стремления к общему методу: у Лейбница была мечта. Он хотел объединить все религии мира. Большинство религий мира очень похожи, и различаются лишь ритуалами и некими нюансами. А Бог – он один. И было бы отлично, если бы люди это понимали. Так считал Лейбниц. Если не получится объединить все религии, так может быть получится объединить хотя бы все ветви Христианства? Ведь невозможно понять и простить войны между католиками и протестантами, каждая из сторон в которых воюет во имя Иисуса Христа. Ну, а если не удастся объединить все ветви христианства, то может быть хотя бы можно объединить все ветви протестантизма? Ну, конечно, Лейбницу это не удалось, но он очень многое сделал для объединения Германии.

Однажды в своей жизни Лейбниц был влюблен (за исключением влюбленности в математику, имеется в виду). Но тут ему не повезло. Его возлюбленной была принцесса – София Шарлотта, дочь герцога Ганноверского, у которого он служил, которая впоследствии стала первой королевой Пруссии (в браке с Фридрихом Первым). С Софи Шарлоттой Лейбниц дружил и поддерживал теплые отношения, учил ее математике. Софи Шарлотта славилась тем, что была королевой-интеллектуалкой, и вместе с Лейбницем создала Прусскую Академию Наук. Но какие-либо романтические отношения были, разумеется, невозможны из-за разницы социального статуса.

В своем путешествии по Европе с Лейбницем знакомится и Петр Первый. Именно Лейбницу принадлежит идея, а впоследствии и составленный по поручению Петра подробный проект нашей Петербуржской Академии Наук. А кроме того, Лейбниц помогал Петру составлять проекты по изменению русского судостроительства и разные новые законопроекты, которые помогли Петру Первому на пути превращения России в правовое государство.

Лейбниц предложил всем перейти на двоичную систему счисления. Основание к этому было интересным. Христианские миссионеры не добились в Китае почти ничего.

Лейбниц приписывает это "биполярной" системе мышления китайцев (что бы это ни значило – но именно так он пишет в письмах). Эта самая "биполярная" система мышления противоположна европейскому многополюсному мышлению. Невозможно в чем-то убедить людей, если весь стиль мышления у вас разный. А мышление формируется счетом и числами! Отсюда вывод: чтобы научиться мыслить биполярно, как китайцы, надо ввести не десятичную, а двоичную систему счисления. После чего наступит взаимопонимание, и китайцев можно будет склонить к истинной вере.

Вот славился Лейбниц грандиозными замыслами! Наверное, именно поэтому Петр Первый, который также был большим мечтателем и имел девиз по жизни "вижу цель, не вижу препятствий" был Лейбницу так близок.

Хотел Лейбниц и построить универсальную математическую логику. Все идеи в мире пронумеровать числами. Например, Бог – это 1. Животное – 2. Разум – 3. Если число А делится на число Б, то в понятие А входит понятие Б. Человек должно быть числом 6 (потому что он и животное, и разумное). А потому же Бог – единица, потому что все сущее несет в себе идею Бога. Если бы все идеи в мире пронумеровать – то любую новую идею можно было бы вывести. Верна она или не верна. Есть тяжба в суде? Давайте рассмотрим все аспекты и посчитаем, кто прав, а кто нет. У Лейбница есть правила и посложнее, чем "правило делимости", конечно. Не то, чтобы Лейбниц действительно занимался построением такой системы понятий, он, скорее, выдвинул гипотезу, показал ее возможность, и на том успокоился. В каком-то смысле, эти идеи универсальной математической логики предвосхитили идеи той науки, которую мы называем сейчас "математической логикой". Но они не были тогда опубликованы, поэтому математическая логика как наука возникла позже, только к середине XIX века в работах Джорджа Буля и Чарльза Доджсона. Ну, а Гёдель зато, размышляя над трудами Лейбница об универсальной арифметической логике, в начале XX века придумал свою "теорему о неполноте".

*/*Теорема о неполноте – настоящий кошмар математиков. Именно с нее начался экзистенциальный кризис математики начала XX века, который (как мне кажется) так и не закончился. А гласит теорема примерно следующее. Представим себе, что у вас есть формальная система, в которой вы определили понятие нуля, единицы, натуральных чисел, и ввели сложение и умножение с теми аксиомами, с какими они обычно вводятся. (И, возможно, какие-то еще, лишь бы непротиворечивые с предыдущими). В такой системе всегда будет существовать высказывание, которое можно сформулировать в этой системе аксиом, но нельзя из нее вывести ни само это высказывание, ни его отрицание. (Т.е. оно не является ни истинным, ни ложным).*

Если какое-то высказывание нельзя ни вывести, ни опровергнуть, его можно сделать новой аксиомой. Но это опять будет формальной системой с понятиями натуральных чи-

сел, сложения и умножения – и там снова будет высказывание, не являющееся ни истинным, ни ложным. Ну, и так далее, хоть до бесконечности.

Одно из высказываний, которые способны понять студенты-первокурсники, и которое (доказано) не может быть выведено из обычных свойств действительных чисел, такое.

Вот у нас есть (бесконечное) множество натуральных чисел (обозначается). Все другие бесконечные множества по мощности не меньше, чем , это мы знаем. Но не обязательно, больше него. Например, по мощности множество "четных натуральных чисел" такое же, как множество "всех натуральных чисел" (хотя и является частью). Но и мощность множества рациональных чисел такая же, как мощность множества натуральных (хотя рациональные числа содержат в себе натуральные, но "по количеству" их одинаково). А вот множество действительных чисел по мощности строго больше множества натуральных () (иначе говоря, вам никак не удастся занумеровать все действительные числа уникальными натуральными номерами). Это теорема открыта Кантором, и ее доказать как раз можно. Мы с моими школьниками 10-классниками ее разбирали.

А "гипотеза Кантора" состоит в том, что любое бесконечное подмножество действительных чисел либо равно по мощности множеству всех действительных чисел, либо же равно по мощности множеству натуральных чисел (это на-

зывается "счетно"). Оказалось (и Гёдель это доказал), что эту гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть. */

Лейбниц оставил вклад не только в математике и компьютеростроении, не в только политике, юриспруденции и философии, но еще и, например, в биологии, психологии, лингвистике, этике, эстетике, и т.д, и т.д. И везде он стремился найти "общий метод" (и зачастую вводил как общий метод математику, именно математику считал мерилом научности науки).

До конца своей жизни Лейбниц активно занимался тем, что пытался объединить Германии. Он, как мы уже упоминали, участвовал в создании Прусской Академии наук, брал учеников, учил Германию математике. Именно с Лейбница начался процесс, который всего через 100 лет, к концу XVIII века уже сделал Германию центром математической (и вообще научной) жизни.

14.1

Философия Лейбница.

Очень близка философия Лейбница к идеям средневековых философов-схоластов. Основная идея схоластов – доказать, что несмотря на все несовершенства, мир устроен Богом красиво, справедливо и, одним словом, "гармонично".

Декарту не хотелось никакой гармонии в мире. Ему хотелось ясности. Паскаль скорее вообще сомневался в том, что мир устроен справедливо и гармонично. А вот основная философская теория Лейбница даже название получила "Теория предустановленной гармонии", излагается она в книге под названием "Монадология".

Основой мировой гармонии являются "монады" (от греческого слова "монос" – единый). Монады – это что-то похожее на души, но не совсем. Наверное, можно сказать, что это "сущность". Такие монады есть у людей, у животных, у растений. Но не только. У их частей – тоже есть монады. У руки, у ноги, у стебля, у лепестка, у хобота, у копыта…

Есть мир материальный, а есть духовный – мир мириад монад. Монады не могут общаться друг с другом, но находятся в непрерывном диалоге с Богом, который их и сотворил. Именно поэтому монада знает все. В каждую монаду включены все понятия мира. Именно поэтому, чтобы глубоко познать весь мир, надо глубоко заглянуть в себя. И хотя это сделать чрезвычайно трудно, но это более простой путь, чем исследовать пристально весь внешний мир. Эта идея вообще характерна для философов XVII века.

Непонятно, математический анализ Лейбница – это отражение его монадологии, или же монадология возникла из-за математического анализа. У Декарта, например, его аналитическая геометрия точно выросла из его принципа "ясности".

Мир состоит из мириад монад. Но каждая монада – содержит в себе опять целый мир, который в свою очередь состоит из мириад монад.

Неправда ли, философия, похожая на математический анализ?

Лекция 15

.

Исаак Ньютон

Рисунок 15.1: Исаак Ньютон. 1642 (1643)–1727гг.

Внешне Ньютон был невысок, но крепкого телосложения. С волнистыми и до глубокой старости очень густыми волосами, хотя к 40 годам уже абсолютно седой.

Как и три прочих наших главных героя XVII века, Ньютон никогда не был женат и не оставил наследников.

Родился Ньютон в Англии, а не на материке. Тут никак не чувствуются события Тридцатилетней войны. Хотя у Англии тех времен своих потрясений достаточно. На детство Ньютона выпали годы Английской Революции. Однако к моменту поступления его в универ, ситуация в Англии уже каким-то образом стабилизировалась, и в стране существовали все условия для того, чтобы успешно заниматься наукой, чем он и занимался.

Если бы революция в Англии не случилась, кто знает? Возможно, Ньютон, простой фермерский сын не смог бы пойти учиться в университет. Не только не дворянин, но даже не сын образованных или богатых людей – как? Но в те времена как раз в Кэмбриджском университете ввели систему, при которой неимущие студенты могли не платить за свое обучение, а отрабатывать его на разных университетских работах. На континенте такое тоже было бы невозможно: все образование было очень дорогим. Позже, когда начали открываться первые университеты в России, там позаимствовали эту систему, и так же смог получить образование Лобачевский.

Итак, Ньютон поступает в Тринити-колледж Кэмбриджа.

К моменту его поступления, на самом деле, у университетов Англии все плохо. Средневековые давно устаревшие программы: мертвые языки, богословие, математика на уровне Древней Греции. Преподавание никаких современных наук не предусмотрено. Но тут Ньютону опять невероятно везет. Когда Ньютон учится на третьем курсе, меценат Генри Лукас дает деньги на открытие должности преподавателя современных дисциплин (физики, астрономии, современной математики). Такая должность существует в Кэмбридже до сих пор. В XX веке, например, на ней одно время числился знаменитый физик Поль Дирак, потом Стивен Хокинг. А в те времена это была экспериментальная должность, и на нее пригласили известного в те времена математика Исаака Барроу, он-то и стал учителем Ньютона.

15.1

Исаак Барроу

И еще одно совпадение, которое в итоге привело к тому, что Ньютон стал тем, кем стал. Исаак Барроу не должен был вообще получить приглашение на работу, и то, что он в итоге вступил в должность – тоже есть результат случайностей.

Барроу к этому моменту 34 года, и он извествный ученый. Он вообще-то богослов и составляет "библейскую хронологию" (в том числе, например, чтобы посчитать точно, какой идет год от Сотворения мира). Но для того, чтобы составить библейскую хронологию, Барроу надо заниматься историей (датировать исторические события).

Рисунок 15.2: Исаак Барроу. 1630–1677гг.

Чтобы заниматься историей, ему приходится заниматься астрономией (потому что многие исторические события жестко привязаны к астрономическим явлениям: появлениям комет, солнечным затмениям, и так далее – именно так их проще всего отнести к какому-то временному периоду с наибольшей степенью точности). Для того, чтобы заниматься астрономией Барроу приходится выучить физику, а в частности оптику (именно Барроу открыл формулу тонкой линзы , позволяющую по радиусам сферических поверхностей линзы установить ее фокусное расстояние). Ну, а уж для того, чтобы хоть что-то петрить в физике, надо хорошо знать математику. Поэтому если хочешь заниматься библейской хронологией – вот тебе еще список дисциплин!

В том самом 1663 году, когда его пригласили прочитать курс современной математики в Тринити-колледже, Барроу уже плыл на корабле в Палестину, чтобы там на месте заниматься своим религиоведением. Однако, на корабль напали пираты. В принципе, пассажиры не обязаны отбиваться от пиратов – но Барроу со шпагой в одной руке и мушкетом в другой, был в гуще событий. От пиратов-то отбились, но корабль пострадал, и вынужден был вернуться в Англию, отложить рейс – а на берегу Барроу получает приглашение в Кэмбридж!

Читать можно было все, что угодно. Лишь бы это была "современная наука". И Барроу стал читать математику. Мы знаем содержание того курса. Весь курс был посвящен одной теореме. Теореме о связи между интегрированием и дифференцированием, которую мы теперь знаем под названием "Теорема Ньютона-Лейбница" или "Формула интегрирования Ньютона-Лейбница". Как же одна теорема, которая сейчас на первом курсе студентам преподается одну лекцию, могла занять целый курс у Ньютона-третьекурсника? Дело в том, что теорема не была до конца сформулирована, а демонстрировалась на десятках примеров.

Из книги по мотивам курса (которую Барроу тогда же примерно и издал) очевидно, что теорему эту он понимал очень хорошо. Да, последнего шага (формулировки, какой мы знаем сейчас) Барроу не хватило. Но теорема фактически уже была. Однако, книга была написана так плохо, что ее никто не читал. Про Лейбница я писала, что он свои результаты всем рассказывал, всячески продвигал и публиковал. К тому же, он очень неплохо владел языком – и его статьи были понятны. Барроу книгу написал, опубликовал – но ее никто не читал, потому что не понял. В книге было 180 чертежей и примерно столько же слов. Барроу считал, что по чертежам все понятно и так. А Ньютон слушал Барроу на лекциях, где Барроу, конечно, чертил чертежи вживую и объяснял, что он делает – и так Ньютон смог понять эту новую теорему.

/* *Уже вторую главу мы постоянно поминаем (и без этого никак) вопросы о том, как создавалась такая большая и важная отрасль математики как Математический анализ. Если вам интересно прочитать про это подробнее – я настойчиво рекомендую полную юмора и иронии книжку В.И.Арнольда "Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук"[46]. В первой главе изложена история вопроса (и глава будет доступна старшим школьникам и нематематикам), а в последующих главах изложены исторические, древние доказательства теорем математического анализа, до "причесывания" и формализации матанализа Вейерштрассом – и это уже лучше читать более подготовленным читателям, но это* *безумно интересно.* */

Короче говоря, в Кэмбридж приезжает Барроу, Ньютон заворожен его лекциями и открывшейся перед ним наукой – и это определяет его в дальнейшем как ученого.

Барроу проработал в Кэмбридже 6 лет и уехал в Лондон, став придворным проповедником. Должность "лукасовского профессора" он оставил 26-летнему на тот момент Ньютону, который уже к тому моменту сформировался как ученый и такую ответственность ему доверить было можно. При этом возникло неожиданное препятствие. В Кэмбридже могли штатными профессорами работать только священнослужители. А Ньютон принимать сан не хотел. Но должность была особенная (спонсорская), поэтому Ньютон ее-таки занял (Барроу сильно настаивал, а придворному проповеднику отказать было сложно). Но жалования от университета Ньютон при этом не получал, а получал только спонсорскую надбавку.

15.2

Чума 65 года

Но вернемся к молодому Ньютону. В 1665 году в Англии начинается страшная эпидемия чумы. (Ньютону на тот момент 22 года, 2 года как он познакомился с Барроу. Университет, как и все заведения в стране, закрываются на карантин. Ньютон уезжает домой в родной городок Вульсторп, где полтора года живет в самоизоляции.

Чума была страшная. Некоторые городки вымерли целиком. В Лондоне умерло 20% населения. В некоторые дни в Лондоне умирало за день 1000 человек.

Говоря грубо, за эти полтора года Ньютон изобрел всё. Именно в эти полтора года Ньютон полностью разработал основы интегрального и дифференциального счисления. Это произошло на много лет раньше, чем до тех же идей додумался Лейбниц (опубликовал Лейбниц свой труд в 1684 году). Хотя работы Ньютона не отличаются той общностью, как у Лейбница. Ньютон, как и Паскаль, был склонен решать конкретные задачи. Лейбниц, как и Декарт, был мастером строить всеобъемлющие теории. Наверное, стоит признать, что Ньютон в первую очередь был физиком. Математика его интересовала как инструмент для решения физических задач. Возможно, именно поэтому он функции рассматривает только от времени, как процесс чего-то во времени (никаких зависимостей, например, цены от спроса или роста от веса он не рассматривал – только процессы).

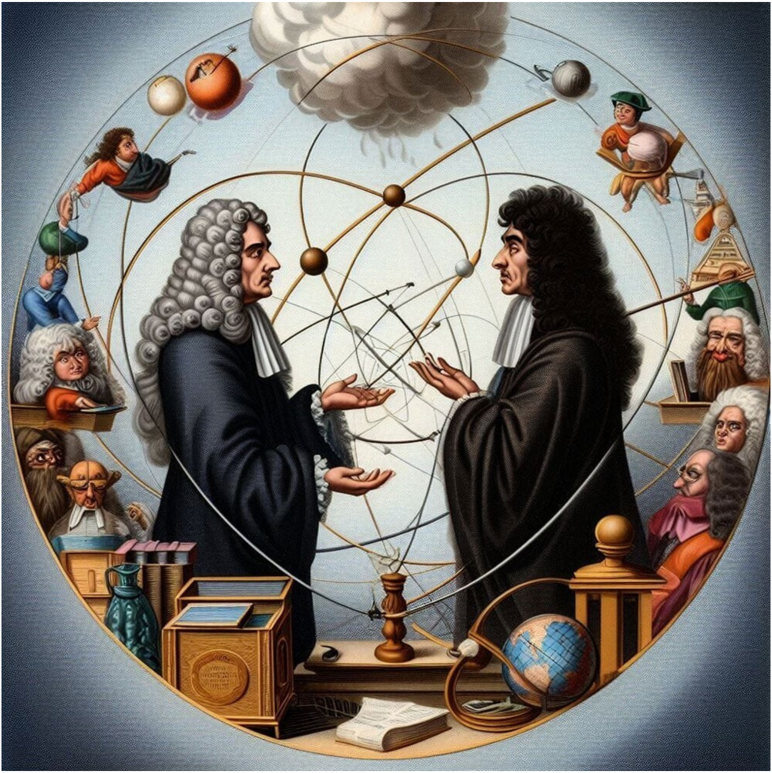
У Ньютона математический анализ более геометрический. У Лейбница – более формальный, аналитический. Общее у них – использование числовых рядов. Оба они понимали, что их можно применять для решения дифференциальных уравнений. У Ньютона в работах есть начала теории пределов, у Лейбница – нет.

Что еще изобрел Ньютон во время этого карантина? Например, бином Ньютона. Вообще говоря, бином Ньютона для натуральных степеней был известен еще в Средние века арабским математикам – это совершенно точно, да и в работах у Паскаля он встречается! (например, в работе про треугольник Паскаля). Ньютон же обобщил формулу для любых рациональных (и отрицательных, и положительных) степеней (получил в этом случае бесконечный степенной ряд).

В этой же изоляции Ньютон сформулировал и Закон Всемирного тяготения. И свои Три закона Ньютона, основополагающие законы физики.

Свои все размышления этих полутора лет о мат.анализе Ньютон оформил в виде книжицы "Метод флюксий и бесконечных рядов" (флюксиями Ньютон называл функцию прироста, то есть производную). Но книгу он так и не издал. Хотя оформил Ньютон свои труды на много (больше, чем на 10) лет раньше, чем Лейбниц вообще узнал про математику. Но Лейбниц свои труды издавал и всем рассказывал, а Ньютон рассказывал только единицам, и то внутри Кэмбриджа. Вся Европа узнала математический анализ именно от Лейбница.

Почему Ньютон не издал свою книгу? Издать математическую книгу в те времена было сложно, потому что они, конечно, как правило, не окупались. Ну, а кроме того, близкие идеи одновременно приходили в голову многим математикам и возникали вопросы о приоритете. Имел ли право А опубликовать Теорему 1, ведь ее уже давно знал Б? Ньютон очень не хотел влезать в дрязги по поводу научного приоритета, не хотел, чтобы его как-либо обвиняли в плагиате. И в итоге работу не опубликовал. Известна фраза Ньютона про то, что он "стоял на плечах великих". Потому что, действительно, многие идеи мат.анализа уже на тот момент витали в воздухе и были известны математической общественности.



По иронии судьбы, именно неопубликование работы и втянуло Ньютона впоследствии в жесточайший спор с Лейбницем о приоритете. В 70 году Ньютон полностью оформил свою книжку "Метод флюксий". Статья Лейбница "Новый метод максимумов и минимумов…" вышла в 84 году. В 93 году Ньютон узнал, что уже вся Европа пользуется матанализом Лейбница, и вступил с ним в очень уважительную научную переписку. Лейбниц в этой переписке восторгается Ньютоном, говорит, что Ньютон сделал в математике больше, чем за всю историю сделали до него!

А поссорили их ученики. Со стороны Ньютона это был Абрахам Муавр (тот, именем которого названа формула Муавра); со стороны Лейбница начали бочку катить братья Бернулли. И со временем вопрос о приоритете раздули до вопроса национальной гордости. В 1712 году вся образованная Англия кричит, что Лейбниц – вор и лжец. Ньютона охватывает это общенациональное безумие. Но сторонники Лейбница тоже не сдавались. В итоге спор вышел грязный и нешуточный. (Со стороны Германии такой волны протеста не было, ведь и Единой Германии не было, были небольшие княжества, но ученики Лейбница, которых было очень много, стояли насмерть!) К концу жизни Ньютон и Лейбниц очень поссорились.

И вот так и получилось, что Англия больше отстаивала приоритет, чем занималась наукой. А прогрессивная Франция (а за ней Швейцария, и Германия) принялись дальше тем временем развивать мат.анализ. В Англии же за следующие почти 100 лет никаких великих прорывов в матанализе не произошло.

Но это я забежала сильно вперед. А Ньютон пока в карантине. С помощью своего Закона всемирного Тяготения и изобретенного мат.анализа Ньютон сделал очень многое как в физике, так и в математике. Например, именно Ньютон (в эти же полтора года) доказал законы Кеплера.

В эти же полтора года Ньютон оформил (и даже почему-то позже опубликовал) свою статью о классификации кубических кривых, это очень тонкая и нетривиальная работа.

/**Кстати, раз уж зашел разговор, возникает нетривиальный вопрос: а кто автор теоремы о классификации кривых второго порядка, которую студенты изучают на первом курсе? А никто! Практически все идеи, необходимые для этого, возникали в Древней Греции. Греки и эллипс, и гиперболу, и параболу знали досконально! Но, конечно, тогда просто не было понятия "кривая второго порядка", потому что для такого понятия нужны координаты. Как только Декарт придумал координаты, так эта классификация сразу сложилась.**/*

Конечно, вопрос с кубическими кривыми намного сложнее. Достаточно только сказать, что невырожденных кубических кривых 72 типа (а не три, как для квадратных)! В ходе работы Ньютон продемонстрировал блестящее владение аналитической геометрией.

Забавное состоит в том, что Ньютон выучил геометрию не по "Началам" Евклида, как было принято тогда, и как более менее принято до сих пор. Ньютон выучил геометрию по Декарту! Когда Барроу это обнаружил – он схватился за голову. Велел Ньютону проштудировать всего Евклида, и принял индивидуальный экзамен. Однако, Ньютон "Начала" так и не полюбил. Считал, что там сильно много времени посвящается доказательству очевидных фактов.

15.3

После уединения

После уединения, Ньютон уже не делает открытий столь масштабных. Работает в университете, читает те самые лекции по современной математике, которые так блестяще прочитал ему Барроу.

Однако, по свидетельствам очевидцев, преподавателем он был плохим. На его лекции ходило 2-3 человека, иногда и вовсе никто не являлся. В 1688 году (Ньютону 45 лет) Ньютона выдвигают быть представителем Кэмбридского университета в парламенте. Про эту его обязанность ходит ровно одна история: за все годы заседаний в парламенте его голос прозвучал лишь раз и это была просьба закрыть форточку. И хотя в этой должности Ньютон себя никак не проявил, но он проявил себя как отличный организатор (или как сказали бы сегодня, как жесткий кризис-менеджер) на другой государственной должности. В 1695 году его назначают смотрителем Монетного двора. Ньютону поручается искоренить фальшивомонетчиков (для чего он организует денежную реформу; организует работу Монетного двора) – и справляется с этим блестяще! Именно за его общественногосударственные должности, а вовсе не за научные заслуги, королева Англии дарует ему дворянский титул в 1703 году. Тогда же он становится президентом Королевсокго научного общества (Английской академии наук).

Рисунок 15.3: Вильям Блейк. Ньютон – божественный геометр.

Лейбниц встречался с путешествующим по Европе Петром Первым в роли ученого. Рассказывал ему о науке, помогал составить план по открытию Петербуржской Академии наук. С Ньютоном в своих странствиях король Петр тоже встречался, однако же (очень вероятно) даже не знал, что тот – блестящий ученый. Ньютон разговаривал с Петром именно в качестве крупного королевского чиновника и финансиста.

Научные изыскания Ньютон не то, чтобы забрасывает, нет. Он по-прежнему занимается физикой, математикой. Очень много – астрономией и оптикой. Например, в 1696 году Ньютон решает задачу о "кривой наименьшего спуска", которую поставил перед научным сообществом Иоганн Бернулли полугодом ранее. Задача состоит в следующем: есть две точки. Одна выше (А), другая ниже (В). Нужно проложить от точки А к точке В "горку" такую, чтобы объект, катящийся из точки А в точку В по этой горке достигал ее за минимальное возможное время. Если верить преданиям, как-то раз Ньютон пришел очень усталый со своей работы в Монетном дворе, на глаза ему попалась эта задача – и он ее за один вечер решил[41]. На следующий же день ее анонимно опубликовали в трудах Английского Королевского общества – но у общественности не было сомнений, кто решил задачу. «Узнаю льва по его когтям!» – так воскликнул Иоганн Бернули, увидев решение. Задачу эту независимо от Ньютона другими методами решили и Лейбниц, и Лопиталь, и Якоб Бернулли. Однако метод Ньютона позже развился в целую отрасль математики – в вариационное исчисление.

Но большую часть своей научной энергии, к нашему (физиков и математиков) бесконечному сожалению, Ньютон тратит на алхимию и на богословие. Никаких трудов по алхимии он не публиковал (и другие не публиковали никаких его интересных результатов). По-видимому, главный резуль-

[41] 1Такую “горку” (она называется "кривая наименьшего спуска" или “брахистохрона”) можно посмотреть, например, в этом видео: [55]

тат его алхимических экспериментов – хроническое отравление ртутью.

А вот в богословии написал очень много философско-религиозных текстов о природе Бога, об отношениях человека и Бога, и прочее. Вообще говоря, за многие из его суждений его могли жестоко покарать, признав их ересью. Ньютон верил не в новозаветного Всеблагого Бога (который "подставь другую щеку" и прости всех), а верил в старозаветного грозного Бога (который "око за око, зуб за зуб"). Он верил, что Христос был сыном божьим, но не думал, что сын божий – единственный, полагал, что их может быть много. Самого себя он тоже считал сыном божьим (потому что его день рождения в те времена приходился на Рождество; позже календарь с Юлианского сменили на Григорианский и теперь день рождения Ньютона почему-то не совпадает с днем рождения Христа). В одной из ветвей протестантской церкви Ньютон признан апостолом. Но вообще, у Ньютона гигантский объем религиозно-богословских учений. Его архив, который разбирали после его смерти, содержит по объему намного больше богословия, чем всего остального вместе взятого (и, между прочим, богословские тексты Ньютона до сих пор до конца не разобраны).

Занимался Ньютон и вопросами библейской хронологии, как его учитель, Исаак Барроу. На свою работу «Хронология древних царств» он потратил времени на порядки больше, чем на создание математического анализа и оптики вместе взятых.

И, кстати, свой Закон Всемирного Тяготения считал прямым доказательством существования Бога. Он писал, что все планеты без руководства некой Всевышней Руки не могут находиться постоянно на своих орбитах, какие предписывает им чистый расчет. Миллионы факторов должны были помешать этому, разладить всю эту идеально сбалансированную систему, и планеты должны были давно уже упасть на Солнце. А раз они не падают – значит, на то есть Высшая воля. Ньютон считает, что на заре времен планеты действительно падали на Солнце, однако, когда они приблизились на определенное расстояние, Божественной Рукой им была придана касательная скорость – и их движение перешло в движение по орбитам.

Сам о себе Ньютон писал так: «…Я не знаю, чем я могу казаться миру; но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу и развлекающимся тем, что время от времени отыскивает камешек, более цветистый, чем обыкновенно, или более красивую раковину, в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным…»

Какие книги можно еще почитать.

К главам 11–15 про XVII век.

[39]

А.С. Штерн, Избранные лекции по истории математики.

—

Лекции, опубликованные в ЖЖ А.С.Штерна (https://dreameranalyst.livejournal.com/) или Те же лекции в ЖЖ матфака ОмГУ (https://imit-omsu.livejournal.com/tag/ИМ%20в%20контексте%20ИК)

/**Не скрою, во многом мои лекции, особенно по 17 веку написаны под большим влиянием лекций моего учителя и наставника, Александра Савельевича Штерна. Его оригинальные тексты можно читать в электронных публикациях.* */

[40]

С.Г. Гиндикин, Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, НМУ, 2001.

/**Совершенно замечательная книжка. Очень хорошо написана, очень живо, увлекательно. Как детектив, а не как научно-популярная литература. Для рассматриваемой эпохи нас интересуют рассказы про Паскаля и Лейбница.* */

[41]

П. Шоню, Цивилизация классической Европы. – Екатеринбург: Уфактория, 2005.

/**Очень хорошая историко-философская вещь. Чтобы понимать историческую обстановку того века.* */

[42]

Б. Спиноза, Этика. – Минск: Харвест, М.: Аст, 2001.

/**Полное название книги "Этика, написанная в геометрическом порядке". Читать (или хотя бы полистать) – очень забавно. Это труд по философии, но тут есть определения, теоремы, доказатальства – все, как мы, математики, любим.**/

[43]

В.Д. Чистяков, Рассказы о математиках. – М.:

Высшая школа,

1966.

/**Эта книжка попроще, чем у Гиндикина, зато математиков там больше.** */

[44]

М. Мамардашвили, Картезианские размышления. – М.: Прогресс, Культура, 1993.

/**Отдельная книга про Рене Декарта.**/

[45]

Б. Тарасов, Паскаль. – М.: Молодая гвардия, 1982.

/**Отдельная книга про Блеза Паскаля.** */

[46]

В.Н. Арнольд, Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. – М.: Наука, 1989.

/**Совершенно замечательная книжка про изобретение математического анализа. Кто был первым: Ньютон или Лейбниц? В чем заслуги одного, в чем другого и отличился ли еще кто-нибудь? Первая глава посвящена истории вопроса. Читала – и местами смеялась в голос, написано с боль-**

шой иронией. В продолжении приведены исторические доказательства некоторых теорем. Как их доказывал Ньютон в 17 веке, а не мы сейчас. Тоже очень интересно! – но уже более узкоспециализировано. А первая глава доступна для понимания всеми./

[47]

К. Фишер, История новой философии в 10 томах. – М.: АСТ, 2004.

/**Как сформировавшаяся в 17 веке новая философия (которая возникла не без участия наших с вами главных персонажей) повлияла в дальнейшем на весь ход философии.*/

[48]

В.Н. Катасонов, Наука и теология у Лейбница. – «Философские исследования», 1995, N1.

/**Книга про Лейбница.*/

[49]

Г.В. Лейбниц, Письма и эссе о китайской философии и двоичной системе исчисления. – М.: ИФРАН, 2005.

/**А это собранные в одном месте письма и размышления самого Лейбница.*/

[50]

С.И. Вавилов, Исаак Ньютон: 1643–1727. – М.:Наука, 1989.

/**Отдельная книга про Ньютона.*/

[51]

И.С. Дмитриев, Неизвестный Ньютон. Силуэт на фоне эпохи. – СПб: Алетейя, 1999.

/**И еще одна отдельная книга про Ньютона. Не знаю, почему про него больше книг, чем про других.* */

[52]

П. Акройд, Исаак Ньютон. Биография. – М.: КоЛибри, АзбукаАттикус, 2011.

/**И да, еще одна книга про Ньютона.**/

[53]

Б. Рассел, История западной философии, в 2 томах. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994.

/**Бертран Рассел – блестящий математик и философ начала 20 века. В свое время получил Нобелевскую премию по литературе как раз за эти труды по философии! Поэтому написано – блестяще.* */

[54]

А.Н. Уайтхед, Избранные вопросы по философии. (особенно статья «Математика и добро», «Наука и современный мир») – М.: Прогресс, 1990.

/**Альфред Уайтхед – тоже математик и философ. Во многих трудах они с Расселом были соавторами. Собственно, Бертран Рассел – его ученик.* */

[55]

Брахистохрона, или Кривая наименьшего спуска. (видео). – https://youtu.be/ukhLdQx9zFM?si=JNiMJbKVaPOdpPwa

/**Видео про кривую наименьшего спуска, которую в свое*

время просчитал Ньютон. Попутно становясь изобретателем такого раздела математического анализа, как «вариационное исчисление». */

/* *А вот по этому периоду как раз книг почти бесконечно много. Одной жизни точно не хватит, чтобы прочитать их все. Это вам не Древняя Индия и Древний Китай.* */

Лекция 16

.

Что такое неевклидовы геометрии?

А зайду я издалека. Вначале были «Начала» (см. главу 6). Великая математическая книга, в своем роде "Библия" всех математиков. И в «Началах» Евклид сформулировал пять постулатов.

От всякой точки до всякой точки можно провести отрезок.

Отрезок можно непрерывно продолжать по прямой.

Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.

Все прямые углы равны между собой.

Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние ипо одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых

Постулаты – это утверждения, не требующие доказательств, синоним слова аксиомы. (В данном конкретном случае исторически принято применять слово "постулаты" для этих пяти аксиом, на которых строится геометрия). И уже из этих утверждений можно выводить другие (они будут "теоремами" – утверждениями, получившими доказательство).

Если возьмем одни аксиомы, получится одна теория (то есть список всевозможных теорем, которые можно вывести из этих аксиом). Если возьмем другие – получится другая. Но тсс! Тогда еще никто не знал, что можно брать другие аксиомы и получать другую теорию. Просто знали, что есть пять вот таких утверждений, которые истинны, и доказывать их не надо. А если взять такие пять утверждений, получается правильная геометрия. Хорошая. Которую можно применять на практике – и все вычисления подтверждаются!

Внимательно посмотрите на эти пять постулатов. Если первые четыре сформулированы очень просто, то пятый явно выбивается из общего ряда. Пятый постулат больше похож на какую-то (даже не очень простую) теорему, а не на постулат! Математики быстро задаются вопросом: а нельзя ли доказать пятый постулат? (и тем самым сделать его теоремой?) То есть, используем первые четыре утверждения – и из них выводим пятое.

Сам Евклид даже достаточно долго в своих «Началах» пытается избежать использования пятого постулата. Первые теоремы он выводит из первых четырех, не трогая этот, особый. Но в конце концов появляется теорема 32: **Сумма углов в любом треугольнике равна двум прямым углам (то есть, по-нашему, 180 градусам).** Эту теорему доказать без пятого постулата у Евклида не выходит.

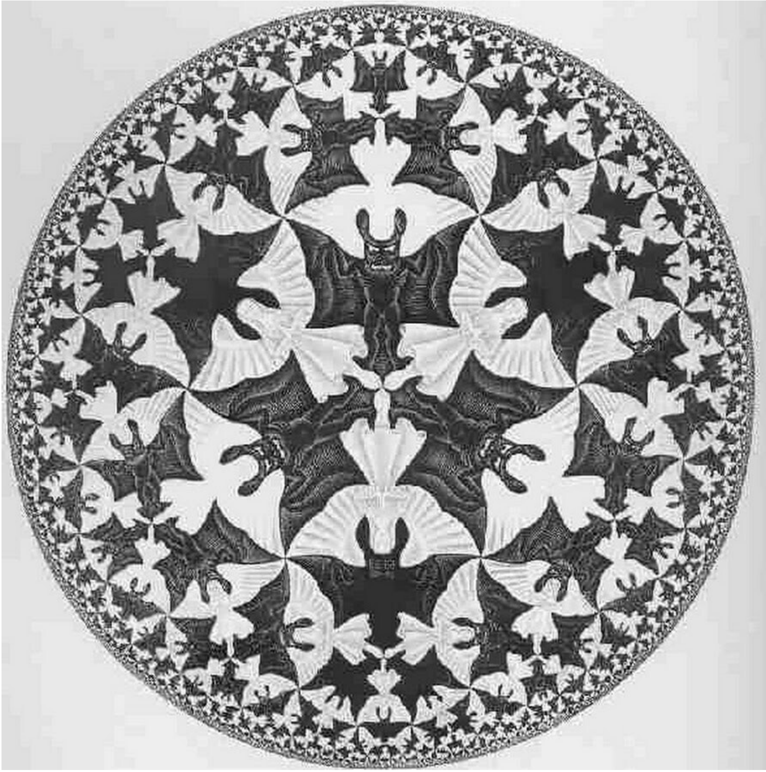


Рисунок 16.1: Мауриц Эшер. Рай и ад. (Предел-круг IV)

Сам же Евклид позже доказал, что эта теорема эквивалентна пятому постулату (то есть, если мы берем первые четыре постулата и теорему о сумме углов – то пятый постулат можно доказать, используя эти пять фактов, иначе говоря, пятый постулат можно заменить на эту теорему и все остальные утверждения останутся такими же).

16.1

Эквивалентные формулировки

Итак, мы знаем одно высказывание, эквивалентное пятому постулату.

Греческий философ и математик Прокл (он жил в V веке нашей эры, мы его упоминали в главе про Фалеса) придумал еще одну эквивалентную формулировку вместо пятого постулата (конечно же, он предпринимал попытки его доказать, но у него не вышло). **Прямая, не пересекающая данную, сохраняет до нее постоянное расстояние.**

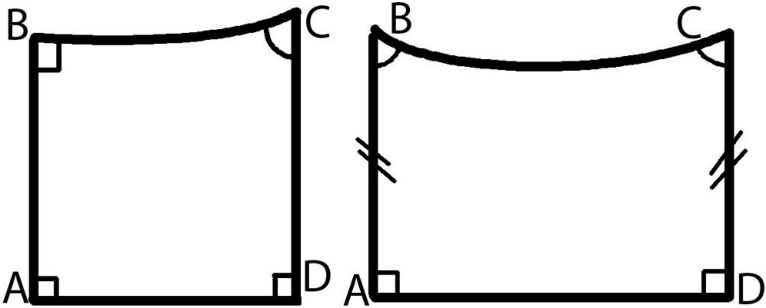


Рисунок 16.2: Четырехугольники Альхазена и Омара Хайяма.

Очень серьезно работали над вопросом доказательства пятого постулата арабские математики. У них тоже вышли хорошие эквивалентные формулировки.

Альхазен (X век н.э.): **Если у четырехугольника три прямых угла, то и четвертый прямой.**

В XI веке очень известный арабский математик (хотя еще более он известен как персидский поэт) Омар Хайям написал трактат "Об истинном смысле параллельных и об известных сомнениях".

Омар Хайям рассматривал (см.рис. 16.2) четырехугольник ABCD такой, что стороны AB и CD у него равны (один отрезок можно наложить на другой и они совпадут), углы в вершинах A и D прямые. Он доказал (опираясь на первые 4 постулата, не используя пятый), что тогда и углы B и C должны быть равны. К чести Хайяма надо сказать, что он не делает ложный вывод о том, что тогда эти углы – прямые.

В конце XVII века итальянец Джироламо Саккери вновь рассматривает четырехугольник Хайяма[42]. Он доказывает, что если углы B и C прямые – это эквивалентно пятому постулату. Доказывает, что 2 тупых угла создают противоречие (с первыми 4 постулатами).

Немецкий математик Иоганн Ламберт в XVIII веке рассматривает четырехугольник Альхазена[43]. Заново доказыва-

---

[42] И четырехугольник Хайяма впоследствии на многие годы входит в математическую (европейскую) литературу под названием "четырехугольник Саккери".

[43] Естественно, четырехугольник переименовывают везде в четырехугольник Ламберта.

ет, что прямота четвертого угла эквивалентна пятому постулату, а тупизна невозможна.

Оба они (ни Саккери, ни Ламберт) не смогли разобраться со случаем острых углов. Случаи не привели их к противоречию, но никаких выводов эти два математика не сделали.

В том же XVIII веке знаменитый математик Лежандр, пытаясь доказать пятый постулат, получает новую эквивалентную формулировку: Существует треугольник, у которого сумма углов 180 градусов. Понятно, в чем отличие от формулировки Евклида? У Евклида любой треугольник должен иметь сумму 180 градусов, у Лежандра – хотя бы один. Более того, получается, что Лежандр показывает, что если хотя бы у одного треугольника сумма углов 180 градусов – то у всех треугольников она такая же!

В современном мире чаще всего пятый постулат мы используем в формулировке Плейфера (конец XVIII века).

Через точку плоскости, не лежащую на данной прямой можно провести ровно одну прямую, которая не пересекает данную.

Согласитесь, эта формулировка проще и понятнее того, что было в «Началах». Однако же, все равно даже эта упрощенная формулировка не так проста, как первые четыре постулата. Так и хочется ее доказать.

Итак, великие геометры на протяжении двух тысячелетий бились над возможностью доказать пятый постулат. И никому в голову не пришло, что это невозможно. А как можно доказать то, что что-либо доказать невозможно? Вот это и сделал великий русский математик

16.2

Николай Иванович Лобачевский

Самой первой неевклидовой геометрией стала геометрия Лобачевского. Другое ее название – гиперболическая геометрия.

Рисунок 16.3: Николай Иванович Лобачевский, 1792–1856

Николай Иванович и не подозревал, что хочет быть математиком. Поступил в свежеоткрывшийся Казанский университет в надежде стать врачом. Не учиться бы Лобачевскому ни в каком университете – материальное положение семьи не позволяло такой роскоши, отца у Лобачевского не было, мать воспитывала троих сыновей одна – но как раз тогда в Казанском университете открыли программу, по которой можно было оплачивать свое обучение работой на университет (помните, как и у Ньютона!). И Лобачевского, начитанного и умного, взяли работать в библиотеку. В библиотеке университета он продолжал работать почти до тех пор, как стал ректором.

И не бывать бы Лобачевскому математиком, если бы, когда Лобачевский был на втором курсе, не приехал в Казань Иоганн Христианн Мартин Бартельс (в России его звали Мартин Федорович). Бартельс был учителем и другом самого "Короля математики", Гаусса. И был очень харизматичный и очень внимательный учитель. Первая же лекция нового ученого, на которой Бартельс на неплохом русском, но пока еще в смеси с немецким, рассказывал об открытых и свежерешенных проблемах современной математики, так взволновала Лобачевского, что он срочно перевелся из медиков в математики. Значит, судьба!

У Бартельса была интересная манера преподавания: некоторые лекции за него частично читали студенты (которым он предварительно для подготовки к лекциям, конечно, давал или литературу, или собственные записи). Однажды он поручил Лобачевскому (который

был в то время старостой курса) прочитать некую лекцию. И какого же было удивление Бартельса, когда Лобачевский доказал все нужные теоремы абсолютно правильно, но доселе неизвестным способом. Вместо того, чтобы прочитать написанные Бартельсом конспекты, Лобачевский доказывал все теоремы самостоятельно!

Бартельс не раз в своих письмах подчеркивал, что студенты казанского университета были бы на хорошем счету и в Германии, в самых лучших на тот момент университетах в мире.

Забавный факт. В июле 1811 года Лобачевскому (ему тогда было 18 лет) должны были присудить степень бакалавра математики. Но не присудили – в связи с плохим поведением. А в августе того же года ему сразу присудили степень магистра за его научные труды. Лобачевский был блестящим студентом, старостой курса, к лекциям и ко всем предметам относился очень ответственно, что не мешало ему как старосте быть и заводилой всех студенческих проделок. В частности, последней каплей (за что ему и не дали диплом бакалавра) стало то, что он соорудил ракету, запустил ее, тем самым перебудив всех ночных городовых в городе (конечно, ночные городовые ночью должны бдеть, а не спать, но факт остается фактом – все спали!), которые с недосыпа объявили пожарную тревогу, и перебудили всю Казань.

С 19 лет Лобачевский начинает работать в родном университете преподавателем, не оставляя своей должности в библиотеке.

23 февраля 1826 года Лобачевский (ему 34) представляет научному сообществу свою «новую теорию параллельных», эту дату и считают "днем рождения" неевклидовой геометрии. Первые публикации появляются с 1829 года, полная книга под названием «Начала новой геометрии», в которой излагается полностью теория, в 1835 году.

Конечно же, Лобачевский пытался доказать пятый постулат (напомню его формулировку: "Через любую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести ровно одну прямую параллельную данной"). Но в какой-то момент Лобачевский понимает, что доказать этот факт, может, и нельзя. А как доказать, что какой-то факт доказать нельзя? Надо взять отрицание этого факта и показать, что нет никаких противоречий.

Вот это и делает Лобачевский. Как можно построить отрицание к пятому постулату? Либо предположить, что параллельных вовсе не существует (этот случай Лобачевский рассмотрел, и он противоречит первым четырем постулатам). Либо, вслед за Лобачевским, предположить, что существует не одна, а больше параллельных.

Итак, геометрия Лобачевского также, как и геометрия Евклида, базируется на пяти постулатах. Первые четыре – одинаковые. А вот пятый у Лобачевского другой.

Через точку плоскости, не лежащую на данной прямой можно провести как минимум две прямые, которые не пересекают данную.

Лобачевский делает первое в истории математики утверждение, которое даже и некоторые математики принимают в штыки (а уж обычным людям это утверждение кажется полной ерундой).

Какие есть теоремы в геометрии Лобачевского? Например, такие:

Сумма углов в треугольнике может быть любой больше 0, но меньше π (180 градусов).

Если три угла треугольника равны трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны (т.е. их можно совместить, "наложив" один на другой; в геометрии Евклида треугольники с равными углами всего лишь подобны).

Пятиугольник может быть прямоугольником (то есть таким многоугольником, у которого все углы прямые,), а вот четырехугольник – нет.

Когда Лобачевский заявляет о своей геометрии, ее осмеивают, заявляя, что он сумасброд и не надо доказывать, что белое – это черное, а черное – это белое. Никакие теоретические выкладки и "доказательства на кончике пера" не убеждают научную общественность, что в этой геометрии нет каких-то скрытых противоречий.

Хотя, собственно, геометрия Лобачевского вообще ничем не хуже геометрии Евклида. Он берет пять постулатов, и выводит из них какие-нибудь теоремы. Абсолютно то же самое делал Евклид.

Лобачевский всю оставшуюся жизнь мужественно защищает новую геометрию, развивает ее, придумывает новые теоремы. Он доказывает, что евклидова геометрия – предельный случай его геометрии (на малых участках они близки). Если геометрия всей Вселенной – геометрия Лобачевского, то ничего странного в том, что в малых масштабах (в масштабах, которые ученые могли измерить в 19 веке) геометрия Евклида работает.

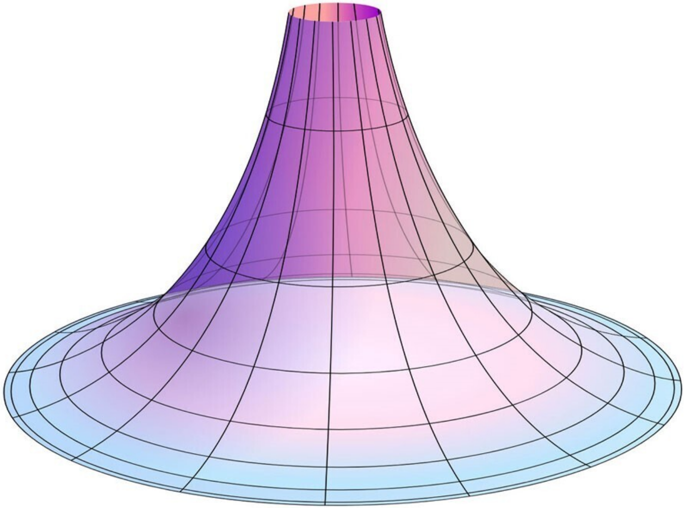


Рисунок 16.4: Псевдосфера

До конца жизни Лобачевскому не удается убедить всех в своей математике. И буквально через 10 лет после его смерти открывают "псевдосферу" (такую поверхность, в которой действует геометрия Лобачевского).

В начале XX века физики пересматривают модель мира. Специальная теория относительности Эйнштейна фактически утверждает, что в нашей Вселенной действуют не законы Евклидовой геометрии, а законы геометрии Лобачевского. Когда строят современные спутники (например, современные спутники GPS), то обязательно уже нужно учитывать поправки на то, что в масштабах Космоса геометрия – не евклидова. Если бы в начале XIX века Лобачевский не изобрел геометрию Лобачевского, к концу XX века у нас бы не было ни GPS, ни много прочих благ, не пользоваться которыми мы уже не в состоянии.

Эта история, история Лобачевского, доказывает всему миру, что не важно, знаем ли мы сейчас применение нашей математики. Если наука правильная, она когда-нибудь сама найдет себе применение. Конечно, Лобачевский не знал ответ на вопрос: "А где применяются ваши теоремы? А что можно сделать с помощью ваших теорем?" Тогда они не применялись нигде. Чистая наука, без примеси прикладной, Пифагору бы понравилось.

Конечно, занимался Лобачевский не только своей геометрией (к 34 годам, когда он ее представил, он был уже именитый ученый, через год его назначили ректором Казанского университета; еще через пару лет ему пожаловали наследственное дворянское звание за его научные заслуги). Много у него работ по математическому анализу, посвященных тригонометрическим рядам, много работ по астрономии и механике (механика – раздел на стыке математики и теоретической физики; математики эту область считают разделом математики, а физики – разделом физики); есть работы и по алгебре, и по теории вероятностей, и по теории чисел. Но основной своей миссией Лобачевский видел развитие науки в России (и во всем мире, конечно). Не просто придумывать теоремы, а вовлекать в этот процесс все новых и новых людей, распространять знания. Именно поэтому он никогда не был ученым-затворником, всегда был учителем, брал учеников, читал лекции.

Можно привести и такой эпизод из его жизни. В одном из магазинов, куда захаживал Лобачевский, был мальчик-приказчик, за которым Лобачевский заметил, что мальчик постоянно что-то считает: оказалось, что парнишка самостоятельно изучает арифметику по книгам, и что вот хозяева магазина в Германии (где он родился) отправили его в Россию, у него нет никого из родных. Лобачевский поговорил с хозяином магазина, и забрал мальчика в гимназию, где тот учился очень хорошо (Лобачевский следил за его успехами). Позже гимназист закончил и Казанский университет и превратился в блестящего знаменитого физика. Это был Иосиф Больцани. И таких историй в жизни Лобачевского было много. Он на самом деле видел себя Учителем – и был им, распространял знания, позволял талантам раскрываться, искать дорогу.

Именно под руководством Лобачевского Казанский университет становится не просто провинциальным русским университетом, "одним из", а встает на одну ступеньку с университетами Москвы и Петербурга. В 1836 году император Николай I посещает университет и присваивает Лобачевскому титул потомственного дворянина.

Однако же, именно настойчивая борьба за свою новую геометрию, стоит Лобачевскому его места ректора. Особенно его новая геометрия не нравится академику и выдающемуся математику Остроградскому, академику, который живет в столице и лоббирует отстранение Лобачевского (этого лже-ученого, по мнению Остроградского) от должности.

Без университета, Лобачевский практически теряет смысл жизни, его здоровье начинает стремительно ухудшаться. Но он до конца жизни не прекращает заниматься новой геометрией, публиковать труды – что, впрочем, только закрепляет в некоторых кругах за ним славу безумного ученого.

/**К сожалению, в этой ситуации математическое сообщество повело себя по отношению к Лобачевскому очень некрасиво. Показало свою закостенелость, и закрытость к новым идеям, чего никак нельзя, на мой взгляд, ожидать от математиков. Возможно, именно благодаря Лобачевскому и этой трагической истории, сейчас математики гораздо сильнее открыты к новым идеям. На самом деле, по моему опыту участия в научных математических конференциях, такой ситуации как с Лобачевским, сейчас практически не может случиться.* */

16.3

Модели геометрии Лобачевского

Примерно через 10 лет после смерти Лобачевского, наконец, появляются ученые, которые "легализовали" его геометрию. Которые показали всем скептикам, что она – настоящая.

Первой моделью геометрии Лобачевского стала поверхность псевдосфера. (См. рисунок 16.4.) Итальянский математик Бельтрами открыл то, что на этой поверхности (к тому времени известной) действует геометрия Лобачевского.

Что значит "на поверхности действует геометрия"? Самое главное: надо договориться, что такое "прямые", если перед нами какая-то искривленная поверхность. Прямые – это кратчайшие пути (на рисунке 16.4 они отмечены тонкими линиями). Если мы берем какую-то поверхность в пространстве, и на ней две точки A и B, то "отрезком" (отрезком прямой) мы будем называть такой путь по поверхности от точки A до точки B, который займет минимальное время. Таким образом на самом деле можно построить много различных геометрий (что позже и сделал Риман).

Другой вариант построения "модели геометрии" предложил Феликс Клейн (еще один блестящий математик и геометр, о котором тоже можно много интересного рассказать). Так вот, смысл следующий. Представьте себе, что весь мир

– это плоский диск (см. рис.16.5). Но чем дальше мы удаляемся от центра этого диска, тем труднее становится идти (Клейн выписал конкретную формулу, что значит "труднее идти").

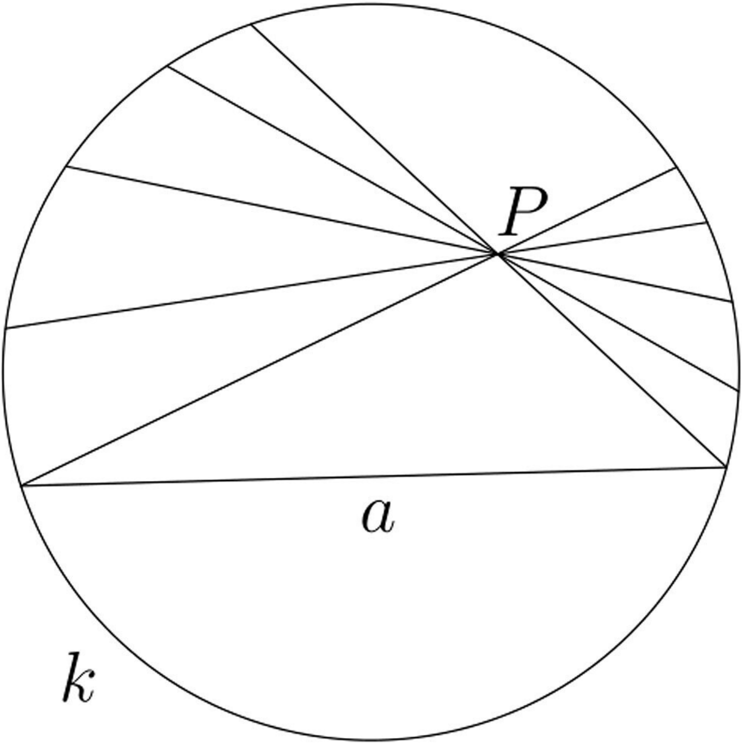


Рисунок 16.5: Модель Клейна геометрии Лобачевского.

Грубо говоря, чтобы вам сориентироваться, что происходит. Скажем, вы стартуете из центра ровно по направлению к границе. На первый километр пути вы потратили 1 минуту. За следующую минуту вы сможете пройти всего лишь пол километра (помните, чем дальше от центра, тем труднее идти). За следующую минуту – еще вдвое меньше, четверть. Когда вы достигните границы круга радиусом 2 километра? Никогда. С вашей точки зрения граница-окружность находится бесконечно далеко. Логично, что расстояния придется измерять не километрами (которые в каждой точке значат разное), а временем. Итак, в такой модели прямые (кратчайшие, а точнее, быстрейшие) это по-прежнему отрезки. Но очевидно видно, что к одной прямой через любую точку вне ее может быть бесконечно много параллельных (см.рис.16.5).

Были еще и другие модели – но про них я уже не буду рассказывать, чтобы никого окончательно не запутать. А кому интересно – можно почитать в хорошей математической книжке, посвященной геометрии Лобачевского. Например, [60].

Естественно, когда математики построили эти модели, стало очевидно, что раз на них выполнены постулаты Лобачевского, в этих постулатах нет внутреннего противоречия.

Через 10 лет после смерти Лобачевского, когда после открытии первой модели гиперболической геометрии отпали последние сомнения в ее истинности и все скептики были посрамлены, сразу же обнаружилось, что не только Лобачевский придумал эту геометрию. Ее же придумали примерно в те же годы венгр Янош Бойяи и немец Карл Гаусс. Но где же они были раньше?

На рисунке в самом начале этой главы ("Рай и Ад" Маурица Эшера) показан как раз пример рисунка в геометрии Лобачевского. Все Ангелы на рисунке – одинакового размера (чем дальше от центра тем идти "тяжелее", помните?).

16.4

Янош Бойяи

Янош Бойяи считается венгерским математиком, хотя родился он на территории современной Румынии, но тогда это была часть Австрийской Империи. По профессии и основному роду деятельности Янош – кавалерийский офицер, математика для него всего лишь хобби. Вообще, он был очень талантливым человеком: играл на скрипке (выступал в Венской Опере!), знал девять языков (включая китайский и тибетский), был признан лучшим фехтовальщиком и лучшим танцором императорской австрийской армии. С математикой его познакомил отец (вот он как раз был профессиональным математиком).

Что сделал Янош в неевклидовой геометрии? Во-первых, он брал классические теоремы и исследовал, зависят они от пятого постулата или не зависят. Какие теоремы/утверждения равносильны пятому постулату. Во-вторых, он написал текст на 24 страницах (примерно тот же объем, что и у Лобачевского), где сделал похожие выкладки и получил ту же геометрию (геометрию Лобачевского).

Вообще, новой геометрией Янош загорелся с ранних лет. Но отец постоянно отговаривал его заниматься такой неблагодарной темой. Говорил, что "потратишь годы и ничего не добьешься, только разочаруешься".

Но Янош не бросил – он упорно изучал новую геометрию. В 1832 году (Бойяи было 29 лет) у него вышла единственная его математическая публикация (та самая статья на 24 страницах). Вышла она как приложение к книге его отца – поэтому вошла в историю математики под названием "Аппендикс". В своем тексте он исследовал, как изменятся теоремы, зависящие от пятого постулата, в новой геометрии. (Те, что не зависят от пятого постулата, очевидно, останутся прежними).

Рисунок 16.6: Янош Бойяи. 1802–1860

Как мы помним, доклад Лобачевского прозвучал раньше, в 1826 году. Но в России. Можно со 100%-ой вероятностью утверждать, что Янош не знал о трудах Лобачевского. А кроме того, хоть он и описал фактически ту же геометрию, но остальные теоремы у него другие. И упор в его статье на другие моменты. Поэтому статья Яноша, безусловно, вносит отдельный и независимый вклад в геометрию. Точнее, внесла бы, если бы была замечена научным сообществом.

В 1831 году отец, Фаркаш Бойяи (отец Яноша), перед публикацией послал эту статью своему доброму другу – Карлу Гауссу. Гаусс очень сухо ответил, что то, что написано у Яноша полностью совпадает с его собственными мыслями на протяжении последних 30 лет, поэтому похвалить Яноша он не может – ему не позволяет скромность.

Янош этим ответом разбит: оказывается, его опередили! И после этого забрасывает математику. Я бы сказала, на пике своей формы![44] В 1848 году Янош находит работу Лобачевского (опубликованную в 1829). Он видит "свои идеи". И подозревает, что это – проделки Гаусса. Что никакого Лобачевского не существовало, а Гаусс спер идеи Бойяи и опубликовал под псевдонимом. Янош в ярости! (И даже пишет Гауссу гневные письма) И этот эпизод окончательно его подломил – его душевное здоровье сильно ухудшается.

После смерти оказалось, что у Яноша в черновиках еще

---

[44] Черт побери! Как же много значит слово! Похвали Гаусс Бойяи – и кто знает, каких бы еще тот наделал открытий?А с другой стороны, эта же история показывает, что надо легче и позитивнее ко всему относиться. Ведь как мог Янош воспринять слова Гаусса: "Ого! Мои мысли прямо как мысли Короля Математики! Вот я крут!" – и опять же, продолжить заниматься тем делом, которое любил и у него явно выходило неплохо.

много доказанных теорем из геометрии Лобачевского. Его вклад в новую геометрию мог бы быть сравним по объему с вкладом Николая Ивановича.

Признание как выдающийся математик Бойяи получил лишь в 1945 году, когда румынский университет Бабеша переименовали в университет Бабеша-Бойяи (это именно в честь Яноша, а не его отца).

16.5

Карл Гаусс

Карл Гаусс – не просто математик. Его совершенно не зря называют "Королем математики", настолько много он сделал. Блестящие теоремы Гаусс доказал во всех современных ему отраслях математики: в геометрии классической и дифференциальной; в алгебре; в теории чисел; в математическом анализе; в механике; в астрономии; (и даже в теории вычислений, которой на тот момент практически не существовало) – во всех этих отраслях есть (и даже не по одной) теоремы его имени и методы, им разработанные.

Рисунок 16.7: Иоганн Карл Фридрих Гаусс. 1777–1855

Родился Гаусс в 1777 году. С юных лет он уже проявлял недюжинные математические способности. Например, формулу суммы арифметической прогрессии он открыл в 9 лет. В 13 лет Гаусс поступает в местный колледж – а там преподает Мартин Бартельс (да-да, тот самый учитель Лобачевского, но еще совсем молодой, Бартельсу 21 год). Сам Бартельс в математике знает не слишком много (только то, что вошло в его "общее образование", математиком Бартельс к тому моменту не был), но вместе с Гауссом он увлекается математикой, они вместе изучают математику по книгам – и позже Бартельс хлопочет о стипендии для Гаусса в Гёттингенский университет, куда Гаусс едет учиться студентом, а сам Бартельс – просто слушает лекции как вольный слушатель. Оба они занимаются у одного научного руководителя, Иоганна Пфаффа. Примерно в это же время в этом же университете учится и Фаркаш Бойяи. Таким образом, большой магии в близости идей Лобачевского, Бойяи и Гаусса, вообще-то нет.

В работах и черновиках Гаусса мы находим развитие геометрии Лобачевского. Ученые полагают, что примерно в 1818 году Гаусс открыл геометрию Лобачевского и в его черновиках, и в письмах есть свидетельства этого. Но никогда и ничего в своей жизни по поводу неевклидовой геометрии Гаусс не публиковал, боясь быть осмеянным. После того, как геометрию Лобачевского признали после открытия ее моделей, начали разбирать черновики Гаусса на эту тему. Объем – колоссальный! Гаусс сделал в геометрии Лобачевского намного больше, чем сам Лобачевский. Ведь он не тратил время и силы на то, чтобы биться за научное признание своей теории, а также на оформление статей и выступление на конференциях! Он сделал намного больше, чем Бойяи, ведь его не ждало разочарование. Работал и работал. А известность ему принесли его другие труды.

Рисунок 16.8: Портрет Гаусса

за авторством другого математика, Иоганна Листинга

В возрасте примерно 60 лет Гаусс изучает русский язык для того, чтобы читать в подлиннике труды Лобачевского.

Вступает с ним в переписку, где восхищается его работами. Он не делает публичных заявлений на этот счет, однако именно по его рекомендации Лобачевского избирают иностранным членом-корреспондентом Гёттингенского королевского научного общества (в те времена Гёттинген был мировым центр математической жизни).

Заслуги Гаусса перед наукой невозможно представить. Например, он первым в мире показал, что планеты можно открывать "на кончике карандаша". В начале 19 века астроном Пиацци открыл первую малую планету – Цереру – и начал за ней наблюдать. Когда она скрылась за Солнцем, наблюдение стало невозможно. И астрономы не могли ее найти. Невооруженным взглядом ее едва ли видно – и надо очень точно целиться телескопом. Так вот, Гаусс по первоначальным наблюдениям рассчитал ее траекторию, и подсказал, куда направить телескоп. Там планета и оказалась.

Гаусс был невероятно плодовитым ученым. Первую свою теорему он опубликовал в 17 лет. Это была теорема, о том, какие правильные N-угольники можно построить циркулем и линейкой, а какие нельзя[45]. И до самой смерти в возрасте

[45] Правильный N-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки, тогда и только тогда, когда $N = 2^{\alpha} p_1 p_2 p_3 \ldots p_m$, где p_i – различные простые числа Ферма.Простое число Ферма – это простое число вида $p = 2^{2^k} + 1$. Например, таковыми являются $3=2^{2^0}+1$, $5=2^{2^1}+1$ или $17=2^{2^2}+1$; а число $2^{2^5}+1$ не является простым числом Ферма, так как не является простым.Вообще, известно ровно 5 простых числе Ферма: $2^{2^k}+1$ для k=0, 1, 2, 3 и 4. Именно поэтому Ферма выдвинул гипотезу, что все числа подобного вида простые. Но нет! Веком позже Эйлер

77 лет продолжал и продолжал придумывать новые теоремы.

И несмотря на все величие Гаусса, и несмотря на огромное количество его трудов по геометрии Лобачевского, открыл миру новую геометрию все-таки Лобачевский. Без его трудов никто не стал бы изобретать модели для этой геометрии, и скорее всего никто не стал бы разбирать странный непонятный кусок черновиков Гаусса.

доказал, что при $k = 5$ число Ферма не простое. Есть ли еще какие-либо простые числа Ферма – это до сих пор открытая математическая проблема.

16.6

Геометрия Римана

Работы Лобачевского и других ученых, которые "легализовали" его геометрию, проложили путь для открытия бесконечного множества других геометрий.

Рисунок 16.9: Бернхард Риман, 1826–1866

Второй (ну, или как считать) стала геометрия Римана. Бернхард Риман родился в 1826 году, в том же году, когда появилась геометрия Лобачевского. В 1846 поступает в Гёттингенский университет. В этом университете учились и работали блестящие математики: Гаусс, Дирихле, Мебиус....

Но по совету отца Риман поступает на факультет теологии. Впрочем, ему на теологии становится скучно – и он переводится на философский факультет (где изучается и математика). И тут встречает Гаусса, Дирихле, Мёбиуса… Докторскую степень в итоге Риман получает под руководством Гаусса, и докторская диссертация у него по теории функции комплексного переменного (ТФКП, он же комплексный анализ).

Однажды для конференции нужно было выбрать студента, который сделает доклад. И Риман сделал такую краткую аннотацию своего будущего доклада: "Евклид утверждал, что через точку вне данной прямой можно провести только одну параллельную ей линию. Лобачевский писал, что параллельных линий можно провести сколько угодно. А я говорю, что нельзя провести ни одной".

И в своем докладе Риман описывает геометрию … сферы[46]. Да-да, самой простой сферы. Ведь на сфере тоже можно строить кратчайшие (именно они на сфере будут носить

[46] Позже Риман там чуть-чуть усложнил описание геометрии: он "склеил" в один объект диаметрально противоположные точки сферы. Это нужно затем, чтобы по-прежнему выполнялся постулат, что через любые две точки можно провести единственную прямую. И тогда любые две прямые в геометрии Римана (в отличие от сферической геометрии) пересекаются не в двух точках, а в одной. Но в основном тексте для ясности изложения и для того, чтобы было понятно более широкому кругу читателей мы не будем употреблять страшные термины типа "факторизация" и просто представим себе сферу и линии на ней.

гордое звание "прямых") между любыми двумя точками. Это примерно 1848 год.

В геометрии Римана вообще нет параллельных прямых, все прямые пересекаются. Сумма углов в треугольнике больше 180 градусов (может быть любым числом в промежутке $(2\pi;3\pi)$). Как и в геометрии Лобачевского есть признак равенства треугольников по трем углам. Прямоугольник с четырьмя углами не бывает, а бывает с тремя (треугольник, у которого все три угла прямые! Как тебе такое, Илон Маск?) В геометрии Римана не работает не только пятый постулат геометрии Евклида, но на самом деле и с третьим проблема. Из любого центра, но не любым радиусом можно провести окружность (окружностей радиусом больше, чем половина экватора сферы, очевидно, на сфере нет). Поэтому отрицанием только пятого постулата геометрию Римана не построишь!

Кстати, на эллипсоиде качественно все то же самое, что и на сфере (нет параллельных, сумма углов больше 180 градусов и т.д.), но просто все вычисления труднее.

Позже, в Римановой геометрии[47] Риман рассматривает совершенно произвольные поверхности. Для вычисления расстояний там используются интегралы, а для записи – дифференциальные уравнения. Фактически, Риман стирает грань

[47] Не надо путать геометрию Римана и Риманову геометрию. Геометрия Римана – это почти как сферическая геометрия. А риманова геометрия – это обобщение вообще всех геометрий в мире и способ построения новых геометрий.

между геометрией и математическим анализом.

В итоге геометрии условно разделили на три типа. Геометрия Лобачевского, она же "геометрия отрицательной кривизны", она же "гиперболическая геометрия". Геометрия Римана, она же "геометрия положительной кривизны", она же "эллиптическая геометрия". И Евклидова геометрия, она же "параболическая геометрия".

16.7

А бывают ли другие геометрии?

А бывают! Ну, во-первых, сферическая геометрия – это геометрия постоянной кривизны. Все точки в ней равны между собой (движением можно любую точку подвинуть до любой). Но геометрия эллипсоида – уже геометрия непостоянной кривизны. И не все точки в ней равны друг другу. Аналогично, и в геометрии Лобачевского тоже любые точки можно совместить движением, она постоянной кривизны. А можно аналогично построить геометрию более сложной поверхности с непостоянной кривизной (и там точки будут не равны друг другу! – это ужас какой-то, но так бывает).

Или вот, например, геометрия совсем другого типа – геометрия Минковского, а еще она называется "геометрия такси".

Представьте, что вы находитесь в городе (см.картинку 16.10). И вам надо из точки А попасть в точку В (длину квартала для простоты примем за единицу). Конечно, в евклидовой геометрии расстояние от точки А до точки В равно , но что толку? Все равно вы не можете двигаться по прямой! Вы будете двигаться по улицам города, и для вас расстояние от точки А до точки В будет равно 6. Кстати, кратчайших здесь от точки А до точки В – не одна, а множество (а именно аж 15 разных траекторий будут иметь ту же длину 6). А число 2

5 никакого отношения к действительности не имеет.

Геометрия? Геометрия! Потому что наука об измерении расстояний. В отличие от евклидова расстояния, которое измеряется по формуле , расстояние в геометрии Минковского измеряется по формуле и называется "манхэттенским расстоянием" – думаю, понятно, в честь чего?

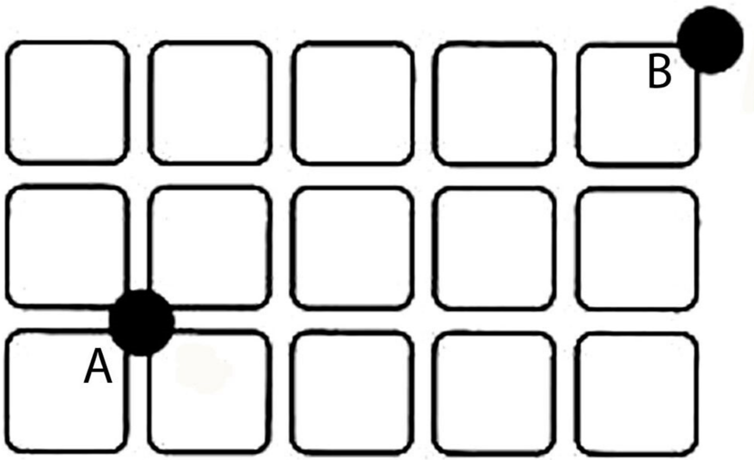


Рисунок 16.10: Геометрия такси

На рисунке 16.11 изображены окружности. Окружность в геометрии Евклида и окружность того же радиуса в геометрии Минковского. Окружность – это совокупность всех точек, находящихся на расстоянии

r

от заданного центра. В геометрии Лобачевского и Римана окружности выглядят как окружности, поэтому я их не рисовала.

В геометрии такси работает неравенство треугольника (сумма двух сторон треугольника больше либо равна третьей стороне). Но не работает куча других теорем, и не идет речь об измерении углов.

Но тем не менее, геометрия очень наглядная и очень повседневная.

Первый пример реализации геометрии Минковского –

спроектированный архитектором Ильдефонсе Серда район Эштампле в Барселоне, четко разделенный на квадраты. И хотя этот район спроектировали и начали строить еще до смерти Лобачевского, никому и в голову не могло прийти, что они строят модель новой неевклидовой геометрии.

Минковский, кстати, еще раз отличился в неевклидовой геометрии. В 1907 году именно он первый понял, что специальная теория относительности Эйнштейна может быть лучше выражена в терминах геометрии четырехмерного пространства. Это пространство с тех пор называется в науке пространство Минковского (у него, в соответствии со Специальной Теорией Относительности строится специфическая метрика[48]), а в научно-фантастических фильмах его же зовут "пространственно-временной континуум". И именно на языке геометрии Минковского Эйнштейн далее описывал свою Общую теорию относительности[49][8]. В пространстве

---

[48] Конечно же, геометрия Минковского была неевклидовой. Минковский для создания из евклидова 4-мерного пространства пространства Минковского использовал идею Римана о том, что в математике "геометрия" не что иное как "способ измерения расстояний". То есть, формула измерения расстояния определяет тип геометрии.Эту же идею, но не явно, использовал Пуанкаре, когда строил свою модель геометрии Лобачевского в круге – он тоже просто задал формулу для измерения расстояния между точками отличную от евклидовской.

[49] Как известно, в Общей Теории Относительности Эйнштейн утверждает, что лучи света распространяются не по прямой (как это утверждали ранее), а "по кратчайшей" траектории. В частности, в близи тяжелых объектов световые лучи искривляются, движутся не по евклидовой прямой. Что говорит о том, что в сложную формулу геометрии нашей Вселенной с самого ее создания вплетены

Минковского очень хорошо и наглядно показаны разные парадоксы Теории Относительности Эйнштейна. Например, "неодновременность одновременных событий" и прочие.

гравитационные силы.Явление искривления лучей света было предсказано Эйнштейном теоретически, а в 1919 году было подтверждено практически во время полного солнечного затмения, когда можно было пронаблюдать лучи от далеких звезд, проходящие вблизи Солнца.В рассказе "Бильярдный шар" Айзек Азимов наглядно описывает ОТО Эйнштейна. И вообще, рассказ классный, всячески рекомендую к прочтению!

16.8

Так какая же из геометрий все-таки правильная?

Когда мы путешествуем по поверхности сферы и выполняем на ней какие-то измерения (например, когда прокладываем маршруты для авиаперелетов) – мы находимся во Вселенной, где работает геометрия Римана. Если мы двигаемся со скоростями близкими к скорости света, нам придется воспользоваться геометрией пространства Минковского. Если мы наблюдаем мир из неподвижной точки, геометрия нашего Космоса – геометрия Лобачевского.

Если же мы в чистом поле строим дом – мы, конечно, пользуемся геометрией Евклида и получаем точные правильные результаты. Но если нам надо добраться из точки А в точку В на Манхэттене или в районе Барселоны Эштампле – то придется воспользоваться геометрией такси!

Правильная математика найдется на любой случай жизни.

Какие книги можно еще почитать

К главе 16 про неевклидову геометрию.

[56]

Жуан Гомес, Когда прямые искривляются. мир неевклидовой геометрии. – М.: "ДеАгостини", 2014.

*/*Популярно про неевклидовы геометрии. Отличная книжка.*/*

[57]

С.Г. Гиндикин, Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, НМУ, 2001.

/**Для этой главы нас интересует главы про Карла Гаусса и Феликса Клейна. Но я уверена, что стоит вам прочитать главу про Гаусса, вы не сможете оторваться и прочитаете всю книжку.**/

[58]

В.Д. Чистяков, Рассказы о математиках. – М.:

Высшая школа,

1966.

/**У Гиндикина рассказы длинные и обстоятельные, но зато всего про 14 математиков. У Чистякова математиков больше, а рассказы – коротенькие. Можно познакомиться с разными математиками.**/

[59]

Айзек Азимов, Бильярдный шар (рассказ).

/**Рассказ, который я рекомендую прочитать всем студентам просто для понимания в голове Общей теории относительности. Без цифр, без физики. Просто детективно-фантастический рассказ. И в конце концов, это Айзек Азимов! Я была бы не я, если бы рекомендовала кому-то какие-то книжки на почитать, и ни разу бы не упомянула там Азимова. Я его очень люблю.**/

[60]

В.В. Прасолов, Геометрия Лобачевского. – М.: МЦНМО,

2004.

/**Хороший учебник по геометрии Лобачевского. Будет полностью доступен студентам, освоившим конформные преобразования комплексной плоскости, но при адаптации можно использовать и для школьников.**/

Лекция 17.

Откуда появились компьютеры и когда искусственный интеллект захватит мир?

Современный мир невозможно представить без компьютеров. Компьютер, превосходящий по мощности то, что еще невозможно было представить 20 лет назад, сейчас есть у каждого человека в кармане. В вашей микроволновке, стиральной машинке, в вашем пылесосе скорее всего есть небольшой компьютер. Компьютеры помогают управлять автомобилями (или даже полностью ими управляют), не говоря уже о менее повседневной технике: подводных лодках, самолетах, ракетах… Современный мир – мир компьютеров. А вот для того, чтобы давать компьютерам указания, существуют программисты и программирование. Программирование родилось и некоторое время развивалось как новая отрасль математической науки. И хотя сейчас уже отделилась в полноценную самостоятельную науку, мне кажется, в рамках историй про историю математики можно поговорить и об этом.

17.1

Древнейшая предыстория

Уже в древности перед людьми стояли задачи вида: "придумать алгоритм того-то и того-то". В «Началах» Евклида подобные задачи – сплошь и рядом. Особенно, как мы знаем, очень нравились Евклиду задачи вида: "придумать алгоритм построения с помощью циркуля и линейки". И вот тут-то люди (точнее, математики) наткнулись интуитивно на такую штуку как отсутствие алгоритма. (Помните три классические задачи на построение, которые, как оказалось, не решаются с помощью циркуля и линейки?)

Или вот еще хорошая задача. Мы с вами обсуждали в главе про Древний Египет, насколько тяжелые были простые арифметические операции. Для выполнения этих операций, очевидно, нужны были алгоритмы.

Рисунок 17.1: Первая страница трактата аль-Хорезми "Краткая книга о восполнении и противопоставлении"

В IX веке нашей эры арабский математик Мухаммед ибн Муса альХорезми публикует трактат, который специалисты знали под названием "Аль-китаб аль мухтасар фи хисаб аль-джебр ва-ль-мукабаля" (в переводе "Краткая книга восполнения и противопоставления"), а все простые смертные кратко называли "аль-джебр" (отсюда и произошло слово "алгебра"). В этом трактате Аль-Хорезми (который на древней благородной латыни был озвучен как Алгоризмус – и от его имени произошло, соответственно, слово "алгоритм") изложил, во-первых, алгоритмы арифметических действий в десятичной позиционной системе счисления (научил всех складывать, вычитать, умножать и делить в столбик!), во-вторых, алгоритмы решения уравнений первой и второй степени; ну и еще некоторые другие.

Кроме того, безусловно, известны из древности и более частные задачи на алгоритмы. Например, древнерусская задача о волке, козе и капусте[50], которая возникает примерно в X веке.

Итак, алгоритмы люди искали издревле. И, конечно, первых искателей алгоритмов (например, аль-Хорезми) можно считать праотцами программирования.

В древности были разные штуки, помогающие считать. Например, счетные палочки. Помогают считать? Безуслов-

---

[50] Задача о волке, козе и капусте хорошо известна каждому, наверное, человеку. Есть волк, коза и кочан капусты. Мужику их надо перевести в лодке на другой берег реки. Но вот беда: в лодку с мужиком влезает только что-то одно (или волк, или коза, или капуста). Если оставить вдвоем на берегу волка и козу без присмотра, то волк козу обязательно съест. Если оставить козу и кочан капусты – то коза не сможет удержаться, чтобы не съесть кочан. Как мужику перевезти все на другой берег?

но. А счеты[51] помогают? Еще как! А у индейцев майя для счета были разработаны специальные узелковые алгоритмы. И тоже: это, безусловно, помогает считать, да! Или вот, например, считается, что Архимед создал механизм, который умел моделировать движение Солнца, Луны и известных на то время планет, а потому с помощью него можно было рассчитывать солнечные и лунные затмения. И вообще, была куча помогающих в вычислении штук. Еще в поколении моих родителей во всю пользовались логарифмическими линейками!

Можно ли считать такие приборы "праотцами" компьютеров? Ну, только при богатой фантазии. Лично я, при всем восхищении от таких приборов и от идей их создателей, никак не могу относиться к ним именно так.

---

[51] В России хорошо известны русские счеты. В Китае суаньпань. В Древнем Вавилоне и в Древней Греции была абака. Это примерно одинаковые устройства.

17.2

Первые счетные машины

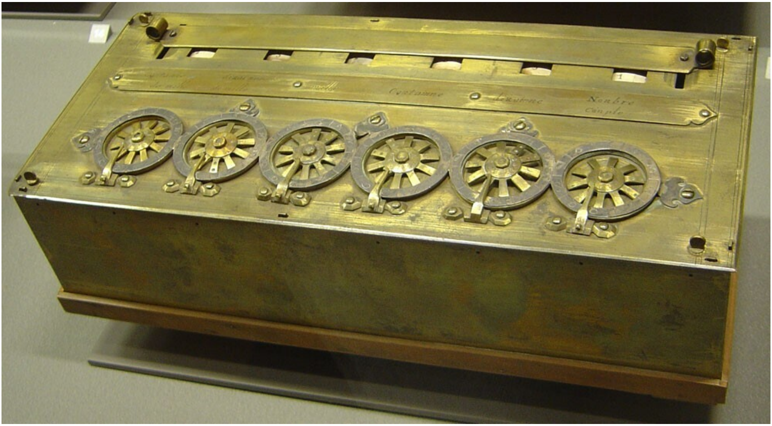


Рисунок 17.2: Счетная машина Паскаля.

Пожалуй, первое, что я готова определить, как "прапрадедушку" персонального компьютера – это суммирующая машина Паскаля (по-французски она красиво называется "паскалина").

В 1642 году Паскаль (ему еще не было и 20 лет! – тинэйджеры исторически сильнее тянулись к компам, в этом история не меняется) изобрел то, что в последствие стали считать первым в мире калькулятором. Что умела машина Паскаля?

Поворотом колесиков вводилось два числа (на шестеренках были числа от 0 до 9). Сначала машина умела работать с 5-разрядными числами, позже – с 8разрядными. И машина автоматически выдавала ответ: результат сложения этих двух чисел. Техническая сложность была в том, чтобы придумать, как будет "перескакивать единичка" через разряд – и грубо говоря, именно этот механизм и придумал Паскаль. Как заставить шестеренки крутиться именно так. Автоматически машина умела только складывать, но Паскаль изобрел алгоритм, как можно с помощью машины вычитать, а также умножать и делить – с помощью нескольких сложений подряд.

Приблизительно на протяжении 300 лет практически все считающие машины были тем или иным усовершенствованием машины Паскаля.

Паскаль лично собрал около 50 суммирующих машин. Их можно теперь найти в разных музеях мира.

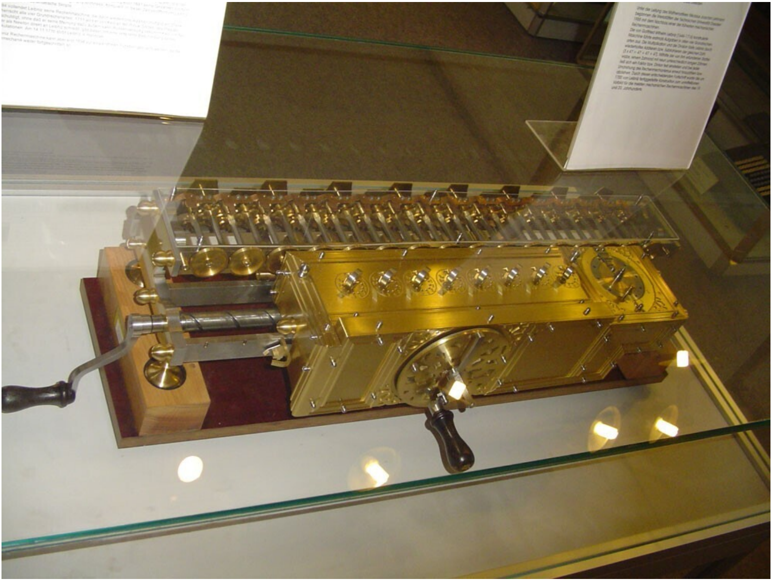


Рисунок 17.3: Счетная машина Лейбница.

Одно из первых успешных усовершенствований машины Паскаля – арифмометр Лейбница, созданный Г.В.Лейбницем в 1673 году. Лейбниц продемонстрировал свое изобретение в Английской Академии наук, где его тут же признали величайшим умом, и присвоили ему членство в этой Академии (в возрасте 27 лет!)

Что умела машина Лейбница? Без всякого программирования (пользователь просто вводил два числа) машина умела складывать, вычитать, умножать и делить числа. Те операции, что можно было выполнить на машине Паскаля последовательными сложениями, теперь выполнялись автоматически.

Лейбниц построил всего 2 экземпляра своей машины. Один сохранился до сих пор. Второй Лейбниц подарил Петру Первому (который, как мы помним, встретился с ним в своих путешествиях по Европе), а Петр Первый в свою очередь передарил диковинку китайскому императору. Отношения России и Китая улучшились, а вот следы счетной машины затерялись на бескрайних просторах Поднебесной.

Некоторые инженерные решения и механизмы Лейбница использовались в разных "счетных машинах" аж до 1970-х годов!

Далее арифмометры развиваются и развиваются. Постепенно они умеют делать все больше действий. Иногда различного рода "компьютеризацию" в докомпьютерный век мы видим вовсе не у счетных, а у других промышленных машин. Например, в 1804 году изобретен Жаккардов станок – ткацкий станок, работающий на перфокартах. На картоне в нужных местах либо есть отверстие, либо нет отверстия. В зависимости от этого (грубо говоря) крючок либо проходит в отверстие, либо нет – и кладет нитку либо поверх остальных ниток, либо снизу. Один из ярчайших примеров не вычислительной, но программируемой машины.

Перфокарты (вот такие картоны с дырочками) потом долгое время служили способом ввода информации в компьютер.

Знания и умения накапливались, и, конечно, количество по законам диалектики, рано или поздно переросло в качество. Произошел по-настоящему качественный скачок.

17.3

Лавлейс и Бэббидж

В 1822 году (вдумайтесь только: с тех пор прошло более 200 лет!) Бэббидж построил прототип своей разностной машины. И чуть позже он же разработал аналитическую машину – универсальный "вычислитель", способный не только на арифметические действия, а вполне полноценный компьютер.

В 1842 году Ада Лавлейс написала первую программу для аналитической машины Бэббиджа. Эти две даты сейчас считаются датами изобретения компьютера и возникновения программирования соответственно.

Чарльз Бэббидж родился в 1791 году, в возрасте 19 лет поступил в Тринити-колледж, альма-матер Ньютона, чтобы изучать математику. Но в изучении математики он опирался больше не на лекции преподавателей, а на книги (Ньютона, Лейбница, Эйлера....) и вскоре обогнал своих преподавателей по уровню знаний.

Он был очень разочарован уровнем знания математики в Англии и организовал "Аналитическое общество", которое постепенно произвело революцию в преподавании математики в Англии (Бэббидж ставил целью этого сообщества, чтобы преподавать математику в Англии стали не хуже, чем в Санкт-Петербурге – и Бэббидж считал, что своей цели добился). За это он получает должность Лукасовского профессора в Кэмбридже (помните, эту должность когда-то занимал Ньютон, а перед ним Барроу?) и звание иностранного члена-корреспондента Санкт-Петербужской Академии наук.

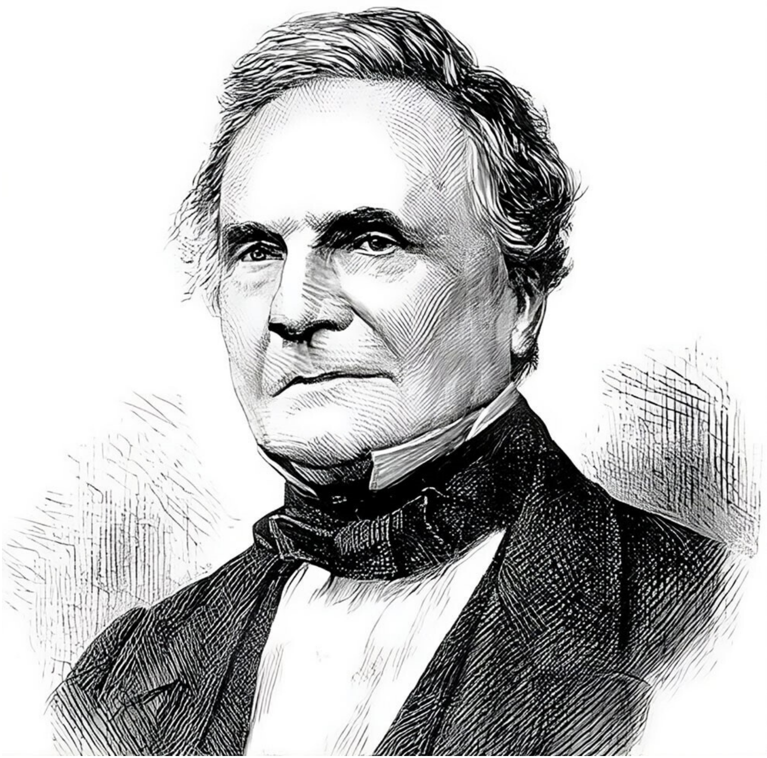


Рисунок 17.4: Чарльз Бэббидж. 1791–1871

В 1827 году он пережил большую трагедию, похоронил почти всю свою семью: жену, отца, из 8 его детей до взрослого возраста дожили только трое. После этой большой трагедии он всю свою профессиональную деятельность направил только на создание компьютера, статьи по математике (по функциональному анализу в основном) писать перестал, к идеям революции в образовании охладел.

Вообще-то, у Бэббиджа были очень разносторонние хобби. Он поднимался на Везувий, погружался на дно в водолазном колоколе, участвовал в археологических раскопках – в общем, делал все, чтобы его машина так и не была построена. Кстати, Бэббидж изобрел спидометр для железной дороги.

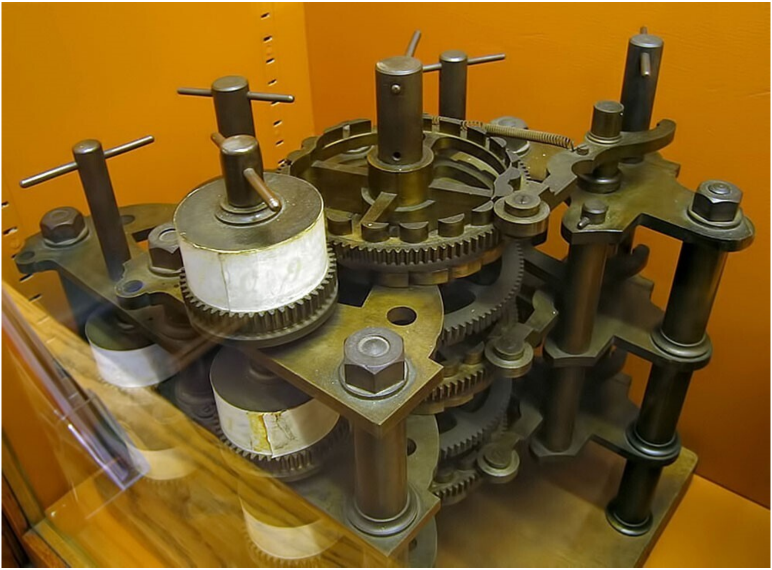


Рисунок 17.5: Вычислительная машина Бэббиджа

В 1820 году Бэббидж заинтересовался идеей вычислений с большой точностью. Логарифмы и значения тригонометрических функций в те времена было принято смотреть по специальным составленным таблицам. Но такие таблицы составлялись вручную и потому содержали множество опечаток. Как же избежать опечаток? Надо, чтобы вычисления производила и составляла такие таблицы машина.

По идее, в Разностной машине Бэббиджа всякие функции экстраполировались многочленами. И машина со сколь угодной точностью вычисляла значения логарифмических, показательных, тригонометрических и разных других функций.

Бэббидж построил в 1822 году прототип – и пошел выбивать финансирование на создание полноценной машины. Деньги ему выделили, он обещал построить машину за 3 года. Однако же, как это часто бывает, с оценкой проекта он напутал. И за ближайшие 5 лет потратил на машину все финансирование (которое все просил и просил), и почти столько же еще собственных денег. А машина так и не возникла.

Более того, в 1833 году Бэббидж понял, что будет гораздо круче построить не разностную, а аналитическую машину! Аналитическая машина (по задумке) позволяла решать намного более широкий круг задач – и вот она фактически была полноценным универсальным вычислителем, полноценным компьютером. По механике аналитическая машина должна была стать даже проще разностной (пока он пытался построить разностную машину, он понял, что современное ему производство не в состоянии произвести детали машины, чтобы воплотить в жизнь сложную механику разностной машины). До сих пор в архитектуре современных (нам) компьютеров используются некоторые решения, которые изобрел именно Бэббидж.

У аналитической машины была (по проекту) оперативная память, процессор, материнская плата (устройство, осуществляющее передачу информации между памятью, процессором и от или до устройств ввода-вывода), устройство ввода (через перфокарты) и устройство вывода.

В 1833 году же Бэббидж знакомится с Адой Лавлейс (ей было всего 18 лет, именно поэтому они не встретились раньше) – и заражает ее своим энтузиазмом! Наконец-то появляется человек, настолько же фанатично болеющий его аналитической машиной, как и он сам. Машину есть с кем обсуждать!

В 1842 году, наконец, правительство Великобритании прекращает финансирование проекта. При жизни Бэббиджа аналитическая машина так и не была построена. Но после его смерти сын по его чертежам достроил машину (в 1906 году, когда производство, наконец, развилось до необходимого уровня), и показал, что она полностью работает, как и задумывал отец.

В 1840 году Бэббидж читал лекции по своей машине во Франции. Они были изданы на французском языке. В 1842 году эти лекции было предложено перевести на английский язык Аде Лавлейс, которая их перевела, а кроме того, написала интереснейшие собственные комментарии. В этих-то комментариях и содержится первая в мире настоящая компьютерная программа.

Рисунок 17.6: Ада Лавлейс. 1815–1852

Настало время поговорить про Аду Лавлейс. Ее отец – эксцентричный, возможно даже немного безумный, гениальный поэт лорд Джордж Гордон Байрон. Ее мать – Аннабелла Байрон – единственная законная жена поэта (и потому Ада –

его единственная законная дочь; сколько у поэта было незаконных детей подсчитать трудно). Аннабелла увлекалась математикой, за что Байрон ее прозвал "Королева Параллелограммов". Однако, брак распался еще до появления Ады на свет. Поэт видел свою дочь ровно один раз в жизни, когда той был примерно месяц от роду.

Однако, сложно сказать, что он не повлиял на ее воспитание. Назвали девочку Августа Ада, но Августа – это было имя сестры Байрона, поэтому называли в семье и потом ее всегда только Ада, имя Августа было под запретом. Воспитывалась Августа Ада в семье родителей Байрона, которые считали того воплощением Сатаны, и в их очень обширной и приличной библиотеке не было ни одного его произведения (что было нонсенсом для образованных людей того времени в Англии). Вообще, на всякий случай всю поэзию объявили злом. И как же отвлечь ребенка от поэзии? Правильно, пусть занимается математикой.

Для Ады пригласили очень хороших учителей: Огастеса де Моргана (того самого, именем которого называются в математической логике "формулы де Моргана") и Мэри Сомервилль, которая стала для Ады примером подражания ("Женщины тоже могут в математику, оооо!") и познакомила Аду с Бэббиджем[52].

---

[52] Известный анекдот про Мэри Сомервилль такой. Однажды в переписке Лаплас написал Сомервилль: «Я знаю только трех женщин в мире, понимающих мои труды. Это вы, мадам Сомервилль, Каролина Гершель и некая миссис Грейг, о которой, к сожалению, мне ничего особо не известно.» "Ничего особо не было

В 1833 году Ада знакомится с изобретателем аналитической машины[53]. Ада и Бэббидж становятся добрыми друзьями на всю жизнь.

Бэббидж в своем особняке устраивал шикарные приемы, куда приглашал только самые сливки общества. За деньги на такие приемы было попасть невозможно. Гости строго отбирались (и первым признаком отбора был ум). На таких приемах бывали премьер-министры Англии, великие ученые и писатели (Диккенс, Фарадей…). Конечно, сюда были вхожи и де Морган и Сомервилль, которые и привели Аду. В гостиной у Бэббиджа стоял собранный прототип разностной машины. Вот тут Ада и пропала.

Через пару лет Ада вышла замуж за лорда Лавлейса. Замужество и трое детей совершенно не помешали Аде заниматься математикой. И даже наоборот: от обожающего ее супруга она получает отличный источник финансирования (кстати, мужа она постепенно разорила, вкладываясь в Аналитическую машину Бэббиджа и в свои собственные изыскания по теории вероятностей).

известно" Лапласу про миссис Грейг по той простой причине, что все просвещенное сообщество знало миссис Грейг под ее именем от второго брака: Сомервилль.

[53] Я крайне рекомендую почитать по поводу приключений Ады и Байрона книжку [61], в которой в жанре графического романа сначала рассказывается правдивая история создания первого в мире компьютера, а потом добавлена фантастическая часть (но ее можно не читать тем, кто не хочет). В книжке с большим юмором рассказывается про этих замечательных людей.

Главный вклад Ады Лавлейс в историю математики – уже упомянутые комментарии к ее переводу лекций Бэббиджа. Комментарии были на 52 страницы (то есть длиннее, чем текст самих лекций). В этих комментариях она доходчиво объясняет принцип действия машины Бэббиджа и пишет пример программы, которая могла бы быть реализована на такой машине.

Ада написала 3 компьютерных программы. Самая первая, самая простая программа, решала систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. В комментариях к этой программе Ада вводит понятие "рабочая ячейка" (ячейка памяти, которая хранит изменяемую по ходу программы переменную). Вторая программа вычисляла тригонометрические функции. Для этого требовалось некоторые операции повторять много раз. И Ада вводит понятие "цикл". Третья программа – для вычисления чисел Бернулли. В этой программе пришлось использовать рекуррентные вложенные циклы. И Ада вводит понятие "рекурсия".

Именно Ада была первой, кто сказал, что вычислительные машины могут работать не только с числами, но и другими объектами. Что с помощью компьютеров можно будет писать музыку, рисовать картины и прочее.[54]

Ада написала первые три правильные работающие компьютерные программы, известные в истории. Таким образом, первая (работающая) компьютерная программа была написана раньше, чем был построен первый (работающий) компьютер. Вот такой вот парадокс курицы и яйца.

---

[54] Ясное дело, в этой главе один из портретов Ады нарисован компьютером. Второй – маслом.

17.4. XX век. Появление "настоящих" компьютеров.

После фактического изобретения компьютера Бэббиджем события понеслись вскачь и трудно отделить одну веху в изобретениях от другой. Компьютеры развивались и развивались, плавно и последовательно. Кто-то пытается пересобрать с новыми условиями производства деталей машины Бэббиджа, кто-то пытается использовать что-то абсолютно новое. Однако со времени изобретения компьютера Бэббиджем (в 1840 году, напомню, он прочитал уже курс лекций по изобретенной им машине) проходит целых сто лет, когда появляется наконец машина, которая сейчас считается первым работающим компьютером (да и то, с "настоящим" современным компьютером те устройства имеют чисто теоретическое сходство; как Homo Erectus, который, конечно, человек, но до Homo Sapiens'а, до человека разумного, ему еще миллионы лет эволюции и вообще как до Луны пешком).

Так вот, первым прямо "компьютером" без сомнений считается электро-механический компьютер Z3, созданный немецким инженером Конрадом Цузе в 1941 году[55]. Конрад Цузе в своем Z3 представил ряд новшеств. Главное из ко-

[55] Кстати, только в 1998 году удалось научно доказать, что та машина была "полноценным универсальным компьютером". До этого, были споры, действительно ли на Z3 можно реализовать любой алгоритм.

торых – двоичная система счисления. Уход от десятичной системы счисления делает механику процесса на много порядков проще! А еще одно гениальное новшество: числа с плавающей запятой. Единственный работающий экземпляр Z3 использовался при конструировании самолетов и запуске ракет, и был уничтожен в 1945 году.

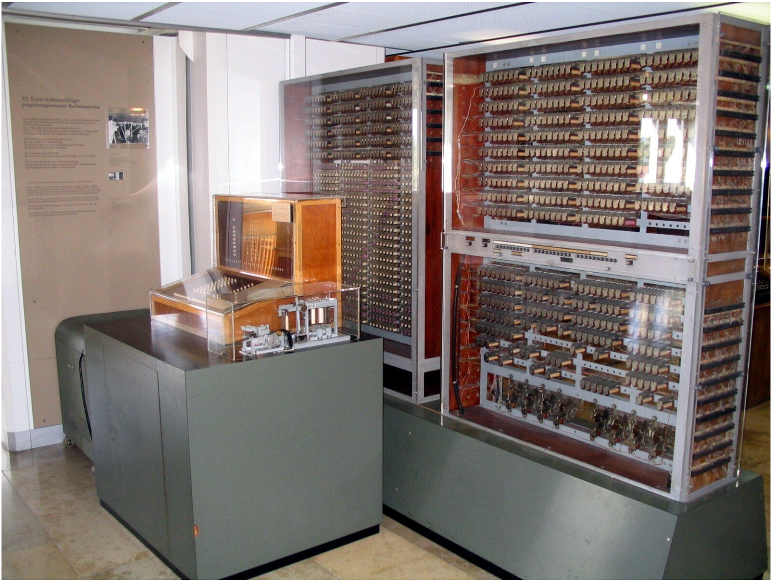


Рисунок 17.7: Электромеханический компьютер Z3. 1941 год.

Великая Война прервала работу Цузе над созданием копьютеров. Следующая модель (Z4) была представлена только в 1950 году. Однако же, с другой стороны, разработку компьютеров в других странах Война только подстегнула.

В 1941 году в Великобритании появляется ЭВМ «Колосс». Это не универсальный компьютер (с помощью него можно делать не все), но это электронное вычислительное устройство, которое помогает британским (можно уже сказать) программистам расшифровывать немецкие шифровки. Зато Колосс становится первым полностью электронным (не механическим и не электронно-механическим, а электронным, хоть и пока на лампах) устройством.

Во время Второй Мировой Войны и много лет после этого основные разработки компьютеров переносятся в США, ввиду удаленности от военных действий. Впрочем, очень много отраслей человеческой культуры во время Войны переезжает в США. Множество ученых разных специальностей (в том числе, конечно, и математиков), множество художников, поэтов и писателей....

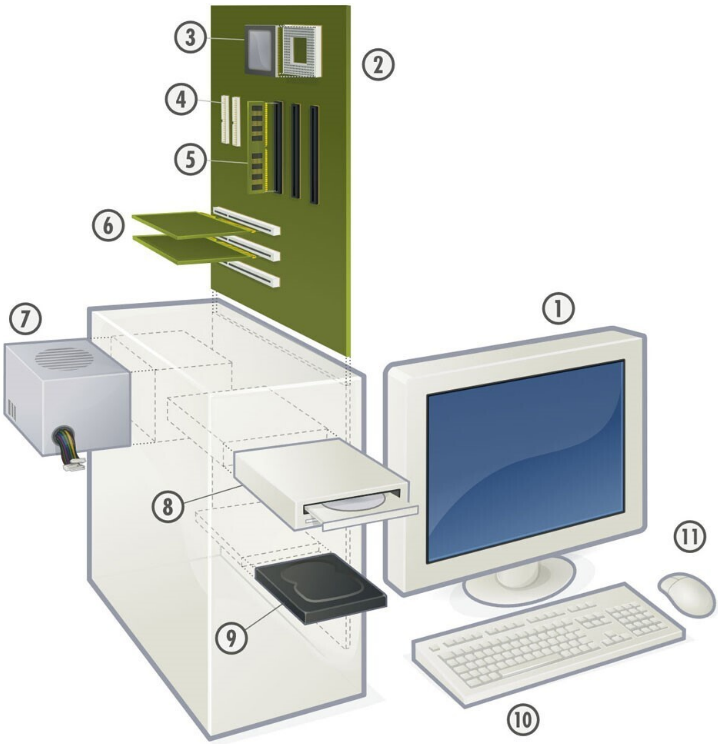
С 1943 году в США появляются полноценные полностью электронные компьютеры (Марк-1, Эниак…), но они во многом еще не идеальны. Например, они не умеют хранить программы в памяти.

В 1948-49 году в Великобритании появляются первые компьютеры, которые уже всем хороши. Первый компьютер в СССР, разработанный независимо, появляется в 1950 году. Такой компьютер размером с дом, называется «Малая электронная счетная машина», построили его в городе Феофания под Киевом. Компьютер Z4 Конрада Цузе считается первым универсальным компьютером на Евразийском континенте (также создан в 1950 году), однако он был электро-механическим. "МЭСМ" – первая ЭВМ на континенте.

В 1947 году изобретают транзисторы. И появляется идея компьютеров второго поколения – компьютеров не на лампах и релейных схемах, а на полупроводниках. Первые компьютеры второго поколения появляются в 1959 году. Появление компьютера на полупроводниках позволяет с течением времени сделать компьютер персональным.

Ну, а кроме того, чему нас учит практика? Да, Цузе построил свои первые версии компьютеров еще до Войны, но его Z1, Z2 и даже Z3 вообще никому не были нужны. Скорее, воспринимались не как что-то нужное, а как некое абстрактное достижение науки. Да, в военные годы правительства стали интересоваться компьютерами в плане военных применений: расшифровка сообщений, автоматическая бомбардировка и прочее. Но в целом только с такими задачами компьютеры на данный момент не развились бы до современного уровня. Очень мощным толчком к развитию (и к захватыванию компьютерами мира) послужило то, что компьютеры попали не только в оборонку и научно-исследовательские институты, а распространились по предприятиям, по банкам, а постепенно – и по домам. А это стало возможно благодаря их уменьшающемуся размеру. Менее, чем за 100 лет машины размером с дом эволюционировали до устройства размером с ладонь, которое еще и во много раз производительнее своего гигантского предка!

Считается, что первый персональный компьютер изобрел Стив Возняк в 1970-х годах.



17.5

Алан Тьюринг

Если говорить об истории программирования и информатики, то как раз подошло время рассказать о таком замечательном математике, как Алан Тьюринг. Алану Тьюрингу выпала очень нелегкая судьба, про которую можно посмотреть в фильме "Игра в имитацию" (2014 года), я же сконцентрируюсь только на вкладе Тьюринга в наше общее дело.

В 1936 году Алан Тьюринг придумал так называемую "Машину Тьюринга". Машина Тьюринга состоит из бесконечной ленты с ноликами и единичками. По ленте бегает читающе-пишущая каретка. У машины есть состояния: в начале работы машина всегда в состоянии S_0, S_N – конечное состояние, и сколько угодно промежуточных. В зависимости от текущего состояния и того, что написано в ячейке ленты, где стоит каретка, каретка может переписать ячейку (с 0 на 1, с 1 на 0), сменить состояние, сдвинуться вправо или влево.

Рисунок 17.8: Алан Тьюринг. 1912-1954.

Машина Тьюринга – это умозрительный, теоретический компьютер.

До создания нормальных ЭВМ никто не строил машину Тьюринга (однако же, на ней программировали). Конечно, в современности можно найти много эмуляторов машины Тьюринга для современных компьютеров и еще забавное ее продолжение – Тьюрмита.

В 10-х, 20-х и 30-х годах XX века наконец очень остро назрел вопрос «А что же такое вообще алгоритм?» И ученые математики пытались дать интуитивному понятию алгоритм строгое формальное определение. Машина Тьюринга позволила это сделать. Примерно в 1936 году сформулирован Тезис Черча (он же определение алгоритма). Алгоритм – это то, что может быть произведено на Машине Тьюринга. И примерно сразу же было показано, что все, существующие на тот момент определения, сводятся к этому (либо очевидно неправильные).

С тех пор критерием истинности "компьютера" является именно это: умение делать все то же, что теоретическая, умозрительная Машина Тьюринга. Наши с вами компьютеры в миллионы раз сложнее, чем лента с пишущей кареткой. А вот делать они могут абсолютно то же самое, и (с теоретической точки зрения) не больше! Правда, намного быстрее и могут показывать результат, понятный обычному человеку.

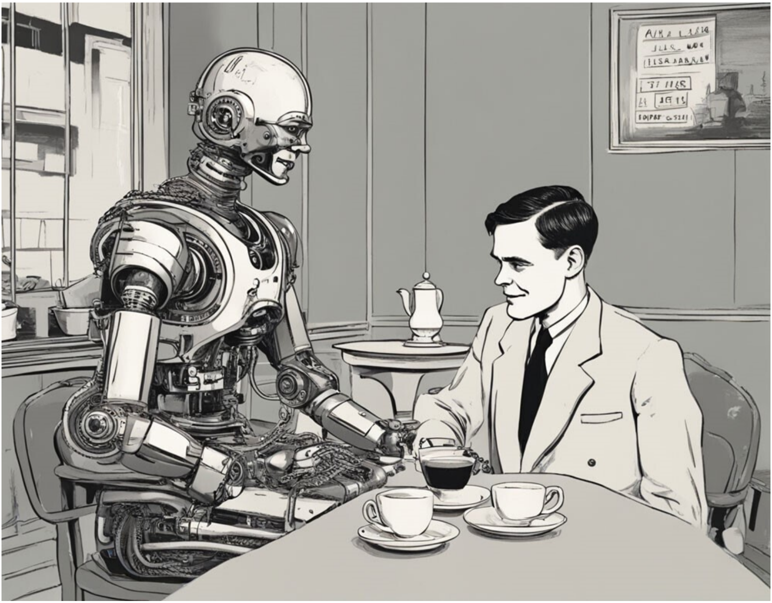
Идея универсальной машины для всего была очень оригинальной! В те годы над таким не задумывались. Считалось, что должны существовать отдельные "калькуляторы" для всего подряд. То есть одна конструкция, заточенная для расшифровки немецких шифровок, другая – для запуска баллистических ракет. И так далее. Когда мы пишем, что придуманная Бэббиджем машина была универсальной – это действительно так, но Бэббидж сам об этом не думал. Когда мы пишем, что Ада Лавлейс предсказывала, что компьютеры будут рисовать картины и сочинять музыку – она думала, что будет отдельный компьютер для рисования картин, а другой будет сочинять музыку.

С момента формализации понятия "алгоритм" стало возможно доказать, что для некоторых задач алгоритма в принципе не существует. Например, сам Алан Тьюринг доказал, что проблема остановки в общем случае неразрешима. То есть, нельзя написать такую программу, которая берет произвольную программу и по ее тексту говорит, на всех ли входных параметрах программа остановится, или на некоторых будет работать бесконечно (про некоторые программы можно сказать, что они точно остановятся; про некоторые можно точно сказать, что они зациклятся на каких-то данных, но общего алгоритма не бывает в принципе).

В годы Второй Мировой войны Тьюрингу пришлось много заниматься криптоанализом – он расшифровывал немецкие шифровки. Именно он разработал спецификацию, по которой построили первый дешифратор – Bombe (вычислитель не для всего, только для шифров). У немцев шифровальная машина усложнилась, Bombe справляться перестал – Тьюринг участвовал в создании новой ЭВМ – Колосс.

В 1950 году Алан Тьюринг пишет первую свою статью по искусственному интеллекту (она считается одной из первых и одной из самых классических научных статей по ИИ в мире), в которой он предлагает известный всем "тест Тьюринга". Тест Тьюринга на долгие годы определил линию развития в области построения ИИ.

Мечтой Алана Тьюринга было превратить компьютер в универсальный музыкальный аппарат, и впоследствии научить его сочинять музыку.



17.6

Языки программирования

Компьютеры создали. Это раз. Некое программирование появилось еще раньше. С этим тоже разобрались. Но полноценно "разговаривать" с компьютером, давать ему указания, человек стал, когда появились языки программирования.

Сначала у машины были базовые команды. У первых машин они вообще ограничивались механикой (помните перфокарты? Есть дырочка – нитку пропусти снизу; нет дырочки – сверху).

В машины посложнее были "встроены" какие-то базовые команды. Язык машинных кодов, команды Машины Тьюринга, язык Assembler… Например, Аде Лавлейс и вовсе приходилось делать тройную работу: написать программу, потом наколоть перфокарту, а потом отдельно человеческим языком написать, чего ее программа делает.

Следующий несомненный виток в истории компьютеров и большой опять толчок в развитии – появление языков программирования высокого уровня. Язык программирования высокого уровня не привязан к конкретной машине, их привязывает к конкретной машине другая программа (компилятор или интерпретатор; который переводит программу с языка программирования в язык машинных кодов). Это очень удобно, потому что компьютеры и даже совершенно новые архитектуры к ним развиваются очень быстро. И до изобретения языков высокого уровня каждый раз приходилось переписывать все программы заново. Все программы писались индивидуально под тот компьютер, на котором будут выполняться. Конечно, это сильно тормозило прогресс.

Сейчас одни люди изобретают новые компьютеры, другие люди пишут программы, а третьи люди разбираются в том, как работает тот или иной компьютер, и пишут переводчик из языка программирования в язык кодов, понятных данному типу машин. Старые программы переписывать не нужно.

Но в самом начале, конечно, это тоже была революционная идея, не слишком популярная. Очевидно же, что программа сразу написанная на машинном языке, работает быстрее, ведь компьютеру не надо делать двойную работу! /**Это, конечно, очевидно, только это неправильно. Но это предмет для отдельного разговора.**/ А быстрота работы программы – это самое главное.

Одним из первых высокоуровневых языков программирования (и это первый язык программирования, получивший повсеместное применение) стал язык Фортран, разработанный примерно в 1957 году группой программистов под началом Джона Бэкуса.

Однако, в 1952 году в СССР появился высокоуровневый язык "Операторный метод А.А.Ляпунова" – о котором Ляпунов читал лекции в МГУ. Достаточно быстро к этому языку написали и интерпретаторы, и парой лет позже появления компьютера МЭСМ, советские программисты уже программировали на этом самом "Операторном методе".

Однако, "операторный метод" – это уже часть истории, а вот Фортран с 1957 года используется до сих пор! Ведь на нем написана уйма математических программ.

Языки программирования тоже развивались, и развивались очень стремительно. Изменялись сами принципы написания программ. Кому интересно – очень рекомендую посмотреть ролик [63] про популярные языки программирования.

Но история творится прямо на наших глазах! Искусственный интеллект, который в 1950 году предрекал Алан Тьюринг, наконец, развился до степени, когда отрицать существование искусственного интеллекта стало трудно. 30 ноября 2022 года был запущен ИИ "ChatGPT" – искусственный интеллект, с которым можно общаться. Он может придумать и рассказать вашему ребенку сказку на ночь, может написать за вас реферат про отмену крепостного права в России, лучше специализированных программ-переводчиков переводит тексты с одного языка на другой, может заменить психоаналитика; с осени 2023 года он уже работает не только с текстовой, но и с аудиовизуальной информацией[56]. И (почему же он встречается в этой главе) – ChatGPT умеет писать про-

[56] нет, ChatGPT не стал первым ИИ, рисующим картины и понимающим человека на слух. Такие были и раньше. Но те обычно делали что-то одно: один ИИ рисовал картины. Другой – распознавал человеческую речь и так далее. ChatGPT – универсальный, один интеллект, одна система для всего!

граммы, при этом пользователь может разговаривать с ним человеческим языком[57]. Таким образом, искусственный интеллект в скором будущем, возможно, заменит специализированные языки программирования, а пользователи будут учиться четко и ясно ставить задачи на своем родном языке, не утруждая себя изучением специализированного языка программирования.

Возможно, как отмерла с распространением персональных компьютеров профессия машинистки (девушки, которая взяла бы мою рукописную, простите за тавтологию, рукопись, засела бы за пишущую машинку, и напечатала бы ее для публикации книги), так когда-нибудь станет бесполезна и отдельная профессия программиста, переводчика с человеческого языка на язык компьютеров.

Но, конечно, совершенно невозможно предсказать, как история повернется в будущем. И это не дело этой книги. Дело этой книги – рассказать, как мы дошли до жизни такой от времен собирательства, охоты и – что гораздо важнее! – наскальной живописи и счетных палочек.

---

[57] Возможно, не любым человеческим языком, но близко к тому. Совершенно точно, с ChatGPT пользователь может общаться на любом из распространенных человеческих языков.


IBM
IBM Quantum
System One

17.7

Квантовые компьютеры и квантовое превосходство

Пока одни люди пишут книгу про историю, другие ее творят. Прямо сейчас.

23 октября 2019 года компания Гугл[58] объявила о впервые достигнутом "квантовом превосходстве". Это означает, что впервые в истории квантовый компьютер решил задачу, фактически непосильную обычному компьютеру.

Поэтому кратко хочу рассказать, что такое квантовый компьютер. Потому что, возможно, это тот кусочек современной истории, который чуть погодя перевернет мир.

Идею квантового компьютера предложили независимо американский физик Ричард Фейнман (в 1981 году) и советский математик Юрий Манин (в 1980 году). Суть парадигмы квантовых вычислений заключается в использовании

[58] С некоторых пор в тексте стало появляться не "Гаусс изобрел", а "группа программистов под руководством Бэкуса разработала", заметили? А чем история современнее, чем открытия масштабнее, тем меньше может сделать один человек. Сейчас об открытиях объявляют компании. Компания Google объявила о достигнутом квантовом превосходстве. В компании OpenAI разработали OpenAI. Аналог ИИ ChatGPT, YaGPT, разработали в компании Yandex… Не одиночки, нет, компании. Теперь один и в научном поле не воин.

для хранения и обработки данных квантовых систем, состояния которых не 0 или 1, а могут принимать любое значение в континууме от 0 до 1. Такие квантовые биты называются "кубиты".

По этой причине были предложены квантовые компьютеры и теоретически высказана гипотеза, что задачи экспоненциальной сложности на классическом компьютере станут решаться на квантовом компьютере за полиномиальное время. Что это значит? Например, вы, злоумышленник, придумали, как взламывать шифр длиной 100 символов. Компания берет и удлиняет код еще на 100 символов. И ваша экспоненциальная программа работает не в 2 раза дольше, а в 2^{100} раз дольше. Если бы она была, например, кубическая – она бы работала примерно в 8 раз дольше. Чувствуете разницу?

Квантовые компьютеры никого не интересовали до середины 1990х годов, когда появились первые квантовые алгоритмы (то есть, программы, теоретически выполнимые с помощью не построенных еще квантовых компьютеров – опять программы появились раньше компьютеров!). Окончательный перелом же произошел после выхода в 1994 году работы Питера Шора, нашедшего квантовый алгоритм, который может за полиномиальное время раскладывать числа на простые множители.

Для обычного компьютера это экспоненциальная задача. И этот алгоритм, если будет реализован, перевернет всю современную экономику. Дело в том, что безопасность современных банковских карт основана на том, что современным компьютерам потребуется несколько лет для подбора пароля к ним. И даже когда компьютеры сильно увеличили производительность (со времени изобретения первых банковских карт), всегда было достаточно использовать ключ чуть-чуть более длинный, что опять возвращало нас на старые позиции[59]. С квантовыми компьютерами этот фокус не пройдет.

"Квантовое превосходство" – это термин, означающий, что какую-либо задачу квантовый компьютер решает быстрее, чем классический, невзирая на полезность этой задачи. Это превосходство было достигнуто в компании Гугл. На квантовом 53-кубитном компьютере решение заняло 200 секунд. Оценочное время работы самого совершенного классического компьютера для этой задачи составляет около 10 тысяч лет.

И хотя по поводу заявления Гугл некоторые компании подают протесты, но в 2020 году китайские ученые тоже заявили о достижении квантового превосходства. У них за 200 секунд компьютер решает задачу, на которую классическому потребовалось бы около полумиллиарда лет.

Пока что задачи, на которых достигнуто квантовое пре-

---

[59] Предположим, компьютеры увеличили свою производительность вдвое. Мы делаем вдвое более длинный ключ. Не 100 символов, а 200. Для проверки правильности такого ключа требуется вдвое больше операций – то есть, она происходит за то же время. Но для подбора такого ключа, если ты его не знаешь, требуется в 2^{100} раз больше времени. И если раньше шифр взламывался, скажем, за секунду, теперь требуется примерно 2^{84} степени лет.

восходство – чисто теоретические, не несущие нормальной практической ценности.

Стоит заметить, что квантовый компьютер не является полноценной заменой классическому, так как тот по-прежнему эффективнее в решении различных классов задач. Но зато ученые уже вовсю придумывают примеры задач, которые в принципе способен решить только квантовый компьютер. Еще следует отметить, что ответы, получаемые на квантовом компьютере, верны лишь с некоторой долей вероятности (они принципиально вероятностные), но так как вероятность эту можно сколь угодно близко приблизить к 1 – это никого не смущает.

Когда исторические события происходят вот прямо сейчас, сложно отделить зерна от плевел. Что повлияет на дальнейший ход истории, а что нет. Что перевернет мир с ног на голову, а что наоборот откатит прогресс на сотни лет назад. Что останется в веках, а что пропадет. Поживем – увидим!

Какие книги можно еще почитать.

К главе 17 про компьютеры.

[61]

Сидни Падуа, Невероятные приключения Лавлейс и Беббиджа. – М.: МИФ, 2017

*/*Графический роман. Первая глава представляет собой историческое исследование биографий Ады Лавлейс и Чарльза Бэббиджа. А вот дальше автор фантазирует, помещая*

героев альтернативно-исторический сеттинг, когда аналитическая машина Бэббиджа все же заработала. Если вас не интересует фантастика, а только история математики – можно читать только первую главу./

[62]

Д.Кнут, Искусство программирования (классический трехтомник и другие тома).

/**Дональд Кнут – один из самых блестящих программистов в истории. Он написал программу TEX, в которой я сейчас пишу этот текст, за что все математики ему были, есть, и будут благодарны. А еще он идеолог программирования. Он задумал написать учебник программирования, который вместит все. Как "Начала" Евклида называют "библией математиков", так "Искусство программирования" Дональда Кнута (особенно первые три классические тома) называют "библией программиста".*/

[63]

Ролик про популярность языков программирования (видео). —

https://www.youtube.com/watch?v=Og847HVwRSI&feature=youtu.be

До послесловия

Почему мы обрываем разговор на таком странном месте? Неужели же, после XVII века в математике больше ничего не произошло? Ну, совсем маленько, на две главы всего.... Конечно же, происходило, произошло, происходит и будет происходить. Математика как начала бурно развиваться в XVII веке, так, не снижая накала страстей, и движется вперед в светлое будущее. Я бы не сказала, что в XVIII, XIX и в XX веках в математике произошло меньше интересного, чем во времена Древней Греции (или хотя бы в Средневековье – а ведь ему я тоже посвятила целую главу). Я бы не сказала, что выдающихся математиков с интересной судьбой в эти века было меньше. Наоборот, там есть о ком рассказать. Так почему же я не рассказываю? Цель нашей небольшой книжки – не совсем рассказать про историю математики. А скорее, проследить взаимное влияние: как развитие окружающей культуры влияет на математику, и как развитие математики влияет на культуру.

В XVII веке влияние настолько явное, что игнорировать его нельзя. В XVIII же веке начинается очень сильная профилизация ученых и мыслителей. Математики – это в первую очередь профессиональные математики. Меняющие математику, возможно, математическое образование, возможно иногда занимающиеся также и физикой, экономикой и другими смежными науками. Но как творчество Пушкина не влияет в XIX веке на труды Чебышева, так и труды Лобачевского совершенно не отражаются на творчестве Льва Толстого. Связь эта опосредована, неявна, и вообще эфемерна.

Новое появление математики в общественной жизни и проникновение математики в поп-культуру, как сейчас принято говорить, можно отнести, пожалуй, к XX веку. Прорыв Эйнштейна в физике (опять предпосылка естественнонаучная). Идея пространства-времени Минковского. (То, что стало возможно благодаря открытию неевклидовых геометрий). Переосмысление искусства в XX веке. И такие направления, как абстракционизм, дадаизм, кубизм – художник не может не оперировать хотя бы некоторыми математическими понятиями. Развитие виртуальных видов искусства. Герои супергеройского боевика с экрана рассуждают о топологии четвертого измерения. И прочее, и прочее. Да, конечно, в XX веке математика влияет на культуру. Хотя, наверное, в начале XX века правит бал все же не математика, а ее сводная сестра физика. А к концу XX века – дочь математики, наука компьютерная. Но и математика тоже.

Математики начинают проявлять себя и в других областях. Бертран Рассел (математик, логик и – внимание! – философ) получает Нобелевскую премию по литературе. Два математика (Джон Нэш и Леонид Канторович) получают Нобелевские премии по экономике (за свои сугубо математические труды, но которые оказалось можно и нужно прикладывать в экономике). Кем в точности был Эйнштейн – физиком или математиком – можно долго спорить, но в его трудах было очень много математики, и современная теоретическая и квантовая физика – это очень во многом математическая, точная наука. А кроме математических трудов, он очень во многих областях выдающаяся личность. Математики (Алан Тьюринг, например) начинают говорить об искусственном интеллекте – чем в принципе поднимают вопрос в философии об определении интеллекта. И так далее, и так далее. Математики (вслед, наверное, за Льюисом Кэрролом, но это не точно) пишут книги (и вполне успешно), создают музыку и песни, рисуют картины. Ну, в общем, да: нельзя отрицать, что в XX веке опять случается сплав математики и культуры в целом.

Но математика XX века – это очень тяжелая тема для популярного разговора. К XX веку математика заспециализировалась настолько, что зачастую один математик не понимает даже формулировку задачи, которой занимается другой. И математику-то еще можно объяснить, а поди объясни это обычным человеческим языком.... Короче, я (пока) к этому не готова. И я даже читала один раз открытую лекцию (прямой эфир лекции можно посмотреть на ютубе [83]) о том, как воспринимать искусство XX века сквозь призму математики, и почему в искусстве много аналогий с математикой. Но рассказывать именно про математику XX и XXI века простым человеческим языком пока не готова.

До послесловия – 2.

И пока что остается непонятным вопрос: а почему именно эти эпохи? Почему здесь примерно треть книжки посвящена Древней Греции, примерно треть книжки XVII веку, и на всю-всю-всю остальную историю математики – даже меньше трети? (То есть, в предыдущей главе я объяснила, почему – потому что они особенные. Но почему они особенные?) Почему античность не времен Вавилона и почему после Архимеда мы ни о ком не разговариваем? На самом деле, из всей Античности мы выделяем математику VI–III веков до нашей эры. Потом прыгаем большим прыжком сразу в XVII век. Потом, как я только что сказала, надо было бы выделить век XX. Почему именно в это время математика имеет наибольшее влияние на сознание людей далеких от математики, почему именно в это время математика максимально влияет на мир и культуру целиком?

Если честно, я не знаю. Как я уже оговорилась в самом начале, я не историк и даже не историк науки. Я просто рассказываю сказки. Однако же, любопытную версию (и в которую лично мне очень легко поверить) высказывает выдающийся математик и философ Альфред Уайтхэд в философской работе «Наука и современный мир» [78]. Он говорит, что эпоха Пифагора и эпоха Декарта имеют интересное совпадение. Именно в это время как пишет Уайтхэд: "… Категории мышления, значимые для многих сфер человеческой деятельности, находились в состоянии распада". Что это означает? В эти эпохи, во-первых, происходят мощнейшие кризисы веры. Люди перестают понимать, где добро, а где зло; отличать сон от яви. Когда происходит кризис веры (считает Уайтхед) вот тут-то и появляется у человека внутренняя потребность не просто знать, творить и мыслить, а доказывать! А раз доказывать – в мышлении п(р)оявляется математика. Математика, которая не полагается на случайность и совпадения, а даже их умеет предсказывать и доказывать.

И это ведь Уайтхэд писал свой труд до начала математизации культуры в XX веке. А в XX веке что мы видим? Снова кризис веры, кризис базовых понятий, смешение и смещение базовых "категорий мышления" и – да-да! – расцвет математики в поп-культуре.

Правдоподобно? Мне кажется, вполне.

И, наконец, послесловие

Большое спасибо всем моим читателям, кто дочитал до этого места. Я очень надеюсь, что было познавательно, а местами и увлекательно.

Автор (то есть ваша покорная слуга) выражает глубокую благодарность Александру Савельевичу Штерну, который был идейным вдохновителем и начинателем читать курс «История математики» именно в таком ключе и контексте. Думаю, и в этой книжке нет-нет да и "торчат уши" его рассказов.

Огромное спасибо моей дорогой ученице и подруге Ане Коломеец, человеку талантливому абсолютно во всем. Которая специально для этой книги нарисовала некоторые иллюстрации еще до написания, что, безусловно, подтолкнуло меня к тому, что книга в итоге была написана.

И гигантское спасибо моему дорогому мужу, который постоянно читал мою книгу в процессе написания, вносил коррективы, (и тут можно написать еще целый абзац, почему муж хороший).

Ох, как же не хочется расставаться с вами, дорогие читатели. Но все же....

Конец. Или нет.

Екатерина Кукина, Мексика, 2023–2024 гг.

Какие книги можно еще почитать

Книги по истории математики

[64]

В. Прасолов, История математики. —

Книга в процессе написания.

[65]

А.С. Штерн, Избранные лекции по истории математики. —

Лекции,
опубликованные в ЖЖ А.С.Штерна

или

Те же лекции в ЖЖ
матфака ОмГУ

[66]

А. Паршин, Путь: Математика и другие миры, – М.: Добросвет,
2002.

[67]

под ред. А. П. Юшкевича, «История математики с древнейших времен до начала XIX столетия» в 3 томах – М.:Наука, 1970.

Книги по другим разделам истории.

[68]

П. Шоню, Цивилизация классической Европы. – Екате-

ринбург: Уфактория, 2005.
[69]
П. Гайденко, История новоевропейской философии в её связи с наукой. – М.: Университетская книга, 2000.
[70]
Б. Рассел, История западной философии, в 2 томах. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994.
Книги о математиках
[71]
С.Г. Гиндикин, Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, НМУ, 2001.
[72]
В.Д. Чистяков, Рассказы о математиках. – М.:
Высшая школа,
1966.
[73]
С.Н. Федин, Математики тоже шутят. – М.:УРСС, 2012.
[74]
Р. Фейнман, Р. Лейтон, Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман! – М.: АСТ, 2014.
[75]
Н. Винер, Я – математик. – М.: Наука, 1964.
[76]
А.Н. Крылов, Мои воспоминания. – С-Пб: Политехника, 2003.
[77]

Э.Т. Белл, Творцы математики. – М.: Просвещение, 1979.
Еще чего
[78]
А.Н. Уайтхед, Избранные вопросы по философии. (особенно статья «Математика и добро», «Наука и современный мир») – М.:
Прогресс, 1990.
[79]
О. Шпенглер, Закат Европы. – М.: Мысль, 1993.
[80]
Г. Вейль, Математическое мышление. – М.: Наука, 1989.
[81]
Р. Музиль, Человек без свойств. – М.: Эксмо, 2008.
[82]
Е.Г. Кукина, Не будь как Гитлер, или Современное искусство глазами математика (видео). —
Запись прямой ютуб-трансляции.

https://www.youtube.com/live/LJOnasMpETw
[83]
У. Голубь, А. Коломеец, Е. Ткачева, Что придумал Галуа? (видео). —
Мультик про Эвариста Галуа, снятый моими талантливыми
студентами.

https://youtu.be/XNVslgK5G9o?si=ISwllYUD0kHzUrgi