Николай Конон

Симметричные числа и сильная гипотеза Гольдбаха-Эйлера

Москва 2023

Николай Иванович Конон

Симметричные числа и сильная гипотеза Гольдбаха-Эйлера

http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=69192001
SelfPub; 2023

Аннотация

В книге исследуются свойства симметричных чисел натурального ряда. На основе указанных свойств показан путь решения гипотезы Гольдбаха-Эйлера. Доказывается несколько теорем, которые позволяют решить проблему Гольдбаха-Эйлера.

Николай Конон Симметричные числа и сильная гипотеза Гольдбаха-Эйлера

Введение

Известны многочисленные свойства ряда натуральных чисел. Одно из них состоит в том, что для любого числа на числовой оси найдется пара чисел, отстоящих слева и справа на одинаковое числовое расстояние от указанного числа. Данное очевидное утверждение исходит из самой природы ряда натуральных чисел, заключающееся в том, что каждое следующее число ряда формируется путем прибавления единицы к текущему числу. Таким образом, уже число *2* имеет пару чисел в составе *1* и *3*, отстоящих от числа *2* влево и право ровно на единицу. А далее с увеличением самого числа, оно будет иметь хотя бы одну пару чисел, отстоящих от него на единицу. Указанное свойство и будет исследоваться в настоящей работе с целью использования при рассмотрении сильной гипотезы Гольдбаха-Эйлера [1].

1. Симметричные пары чисел ряда натуральных чисел

Рассмотрим множество целых неотрицательных чисел, таких, которые включают целые положительные числа из ряда натуральных чисел и добавленное в данное множество число ноль, т.е. $N^+{}_0 = N^+ U \{0\}$ [1].

Исследуем числовую ось натурального ряда $N^+{}_0$ (рис. 1)

$N^+{}_0 = \{0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ \ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots n\ldots\ldots\ldots b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k{-}1\ \ldots k\}$

Рис. 1

Выделим для любого числа n, начинающегося с числа 1 пару чисел a и b (см. рис. 1), при чем, пара чисел a и b соответствуют условию, $a < b$, такое, что выполняется следующее равенство:

$n - a = b - n$. (1.1)

Назовем указанную пару чисел a и b, отвечающую условию (1.1), симметричной парой любого натурального числа n.

Дальнейшие исследования ряда натуральных чисел $N^+{}_0$ показывает, что указанная пара чисел a и b под условием равенства (1.1) обладает интересными и важными свойствами, а именно:

1) Числа a и b равноудалены от числа n слева и справа на числовое расстояние δ.

2) Числовое расстояние δ, на которое равноудалены числа

a и b от числа n равно:

$$\delta = n - a = b - n. \quad (1.2)$$

3) Из выражения (1.2) получаем:

$$a = n - \delta; b = n + \delta. \quad (1.3)$$

4) При этом из выражения (1.2) также имеем:

$$n = a + \delta = b - \delta. \quad (1.4)$$

5) Из выражения (1.3) следует, что сумма симметричной пары чисел a и b является четным числом и равна

$$a + b = 2n. \quad (1.5)$$

6) Из выражения (1.3) также следует, что разность пары чисел a и b также является четным числом и равна

$$b - a = 2\delta. \quad (1.6)$$

Назовем эту разность (1.6) размахом симметричной пары.

7) Из выражения (1.6) вытекает

$$\delta = (b - a)/2. \quad (1.7)$$

8) Можно утверждать, и это очевидно, что количество симметричных пар a и b на числовой оси равно значению n.

Важно исследовать следующий вопрос, в каких пределах изменяется числовое расстояние δ.

Для этого обратимся к числовой оси (рис.1) и построим таблицу 1 множеств симметричных пар при разных значениях n.

Таблица 1

Число n	**Симметричная пара чисел $\{(a, b)\}$ числа n**	**Числовое расстояние δ**
1	*{(0,2)}*	*1*
2	*{(1,3),(0,4)}*	*1,2*
3	*{(2,4),(1,5),(0,6)}*	*1,2,3*

4

$\{(3,5),(2,6),(1,7),(0,8)\}$

$1,2,3,4$

.

………………….

………

n

$\{(n–1,\ n+1),\ (n–2,\ n+2),\ldots\ldots\ (1,\ n+n\text{-}1),\ (0,\ n+n)\}$

$1,2,3,\ldots.n–1,n$

где a и b – симметричные пары для числа n.

Очевидно, и исходя из свойств натуральных чисел, что числовое расстояние δ, равное половине размаха симметричной пары (см. 1.7), изменяется от 1 до n, и по значению не больше самого числа n.

Назовем числовое расстояние δ шагом симметричной пары (шагом симметрии), который меняется

$\delta = (1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ n)$. (1.8)

Из свойства 6 и выражения (1.6), очевидно, что размах симметричной пары равен удвоенному значению шага симметрии.

Исходя из данного определения и исследованных выше свойств симметричных пар, сформулируем следующую лемму.

Лемма 1: Любое натуральное число n, начиная с числа 1, имеет симметричные пары в количестве, равном самому значению натурального числа.

Доказательство. Из свойств натуральных чисел $N^+{}_0$ известно, что они являются арифметической прогрессией, такой при которой любое натуральное число можно записать в виде

$n_{i+1} = n_i + 1$, (1.9)

Исходя из вышесказанного в (1.9) можно записать

$n_{i+\delta} = n_i + \delta$, (1.10)

где δ число равное $1, 2, 3.....$

Тогда можно записать, что и

$n_{i-\delta} = n_i - \delta$. (1.11)

Отсюда имеем

$n_i = n_{i-\delta} + \delta$. (1.12)

Следовательно, из (1.8) и (1.9) получаем

$n_i - n_{i-\delta} = n_{i+\delta} - n_i = \delta$. (1.13)

Далее если принять $n_{i+\delta} = b$, $n_{i-\delta} = a$, $n_i = n$, то в новых обозначениях можно записать

$n - a = b - n = \delta$. (1.14)

Таким образом, мы получили выражение (1.2), откуда следует (1.3), т.е.

$a = n - \delta; b = n + \delta$.

Ввиду того, что $\delta = 1, 2, 3..... n$, получаем количество пар

a и b равное n. Так как указанные пары удовлетворяют свойствам 1) – 8), следует, что они симметричны, а это и доказывает лемму.

В результате, выше определено понятие симметричных пар и их шаг симметрии, которые представляют особый интерес исследования настоящей работы.

2. Исследование множеств симметричных пар

Рассмотрим множество C симметричных пар числа n, такое что,

$C = \{a_n,\dots a_i,\dots a_3, a_2, a_1, b_1, b_2, b_3,\dots b_i\dots b_n\}$, (2.1)

где a_i, b_i. – симметричные пары, удовлетворяющие свойствам 1) – 8).

Для примера рассмотрим число *10*. Тогда множество C симметричных пар числа *10* будет $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

Представим множество симметричных пар C в виде двух других множеств A и B, которые состоят из множества

$A = \{a_1, a_2, a_3,\dots a_n\}$ и множества $B = \{b_1, b_2, b_3,\dots b_n\}$. (2.2)

Очевидно $C = A\ U\ B$.

Для нашего примера эти множества будут

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

Парные элементы приведенных множеств также удовлетворяют свойствам 1) – 8). Очевидно, что мощности обоих множеств $|A|$ и $|B|$ одинаковы и равны n.

Следует заметить, что эти множества взаимосвязаны, при чем, элементы в указанных множествах имеют взаимно однозначное соответствие одного множества к другому, и они в совокупности составляют симметричные пары (a_i, b_i).

Действительно, имеем $a_1 = n-1$, $a_2 = n - 2$, $a_3 = n - 3$, $\ldots a_i = n - i$, …….. $a_{n-3} = 3$, $a_{n-2} = 2$, $a_{n-1} = 1$, $a_n = 0$, и $b_1 = n + 1$, $b_2 = n + 2$, $b_3 = n + 3$, …….. $b_i = n + i$,……. $b_{n-1} = n + n - 1$, $b_n = n + n$, то есть, такое взаимное соответствие можно выразить следующей зависимостью

$a_i = n - i$, $b_i = n + i$, (2.3)

где $i = 1,2,3, \ldots\ldots.n$.

Следовательно, для симметричных пар выражение (1.5) поэлементного соответствия будет выглядеть

$a_i + b_i = 2n$ и $b_i - a_i= 2i$, (2.4)

где $i = 1,2,3, \ldots\ldots.n$.

Отсюда видим, что шаг симметрии равен номеру симметричной пары, т.е. $\delta=i$.

Анализируя выражения (2.3) и (2.4), можно видеть, что множества A и B в свою очередь состоят из подмножеств нечетных и четных чисел, т.е. можно записать

$A = nch_A\ U\ ch_A$;

$B = nch_B\ U\ ch_B$, (2.5)

где nch_A и ch_A – подмножества нечетных и четных чисел множества A;

nch_B и ch_B – подмножества нечетных и четных чисел множества B.

Для указанного выше примера, имеем

$nch_A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ и $ch_A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

$nch_B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$ и $ch_B = \{12, 14, 16, 18, 20\}$.

Очевидно, и это не требует доказательств, что мощности подмножеств $|nch_A|$ и $|ch_A|$ одинаковы, т.е. равны. Также можно сказать и о подмножествах $|nch_B|$ и $|ch_B|$, мощности которых также равны между собой.

Легко видеть, что мощности четных подмножеств $|ch_A|$ и $|ch_B|$ равны друг другу, и мощности для нечетных подмножеств $|nch_A|$ и $|nch_B|$ также равны друг другу, при этом само число n, являющееся центром симметрии, и ни в какие множества не входит.

Таким образом, можно записать следующие тождества:

$|ch_A| = |ch_B|$;

$|nch_A| = |nch_B|$;

$|ch_A| = |nch_A|$;

$|ch_B| = |nch_B|$; (2.6)

$|ch_A| = |nch_B|$;

$|ch_B| = |nch_A|$;

$|nch_A| = |ch_B|$;

$|nch_B| = |ch_A|$.

Отметим и то, что симметричная пара может состоять либо только из нечетных чисел, либо только из четных чисел, но ни как по-другому, т.е. пара (a_i,b_i) не может иметь одновременно разную чётность. Этот очевидный факт является очень важным и в дальнейшем будет использован. Чтобы увидеть правильность сказанного, следует внимательно посмотреть на выражения (2.4), так как в правых их частях стоят четные числа, и, следовательно, суммы левых частей должны быть также четными, что возможно только тогда, когда два слагаемых в левых частях будут одновременно нечетными или четными.

Докажем следующую небольшую лемму.

Лемма 2. Любое четное число может быть однозначно отнесено к натуральному числу вдвое меньшему данного четного числа.

Доказательство. Действительно, так как четное число n выражается формулой $ch=2n$, то разделив его на двойку, получим утверждаемое натуральное число, что и доказывает высказанное утверждение.

Рассмотренные выше соображения позволяют сформулировать следующее важное утверждение или теорему.

Теорема 1. Любое число n представимо суммой чисел любой симметричной пары, отнесенной к числу $2n$, вдвое меньшему данному числу, т.е. равной удвоенному значению числа n, находящемуся на середине отрезка числовой оси $[0;2n]$.

Доказательство. Действительно, согласно выражению (2.3) на числовой оси $[0;2n]$ можно составить n симметричных пар (a_i,b_i) таких, что $a_i + b_i = 2n$. Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано.

Из сформулированной выше теоремы следует две леммы, доказательства которых очевидны.

Лемма 3. Любое четное число $2n$ представимо суммой симметричных пар четных или нечетных чисел, количество которых равно n.

Доказательство указанного утверждения фактически приведено выше.

Из рассмотренного выше исследования симметричных пар чисел нас интересует класс нечетных симметричных пар чисел, среди которых класс симметричных простых чисел.

3. Симметричные пары простых чисел

Рассмотрим в первую очередь интересный класс симметричных пар чисел из множества нечетных чисел.

В предыдущем разделе было показано, что числа симметричной пары всегда имеют одинаковую четность, т.е. состоят либо из двух нечетных чисел, либо из двух четных чисел.

Исследуем подмножества симметричных пар нечетных чисел, сумма которых, конечно, является четным числом.

Как было показано в предыдущем разделе, оба подмножества нечетных чисел nch_A множества A и nch_B множества B имеют однозначное соответствие и, следовательно, имеют одинаковые мощности или то же самое равное количество элементов.

Выделим в каждом из них еще по два подмножества, а именно:

Подмножество составных нечетных чисел S и подмножество простых чисел P, которые запишем следующими выражениями

$nch_A = S_A \, U \, P_A;$

$nch_B = S_B \, U \, P_B,$ (3.1)

где S_A, S_B – подмножества составных нечетных чисел симметричных пар из множеств A и B соответственно;

P_A, P_B – подмножества простых чисел симметричных пар из множеств A и B соответственно.

Так в примере, приведенном выше

$S_A = \{9\}$, а $P_A = \{1, 3, 5, 7\}$

$S_B = \{15\}$ и $P_B = \{11, 13, 17, 19\}$.

Исследуем вопрос, как будут соотноситься элементы указанных подмножеств, при формировании симметричных пар конкретного числа n.

Анализ рис. 2 показывает, что при формировании симметричных пар числа n будут участвовать как составные нечетные, так и простые числа. Из (2.6) имеем, что мощность $|nch_A|$ подмножества элементов нечетных чисел nch_A множества A будет равна мощности $|nch_B|$ подмножества нечетных nch_B множества B, т.е. имеем

$|nch_A| = |nch_B|.$ (3.2)

Тогда, исходя из того же выражения (2.6) можно записать

$|nch_A| = |S_A| + |P_A| = |nch_B| = |S_B| + |P_B|$. (3.3)

Отсюда следует важное следующее равенство

$|S_A| + |P_A| = |S_B| + |P_B|$. (3.4)

Следовательно, правомерно записать и такое соответствие

$S_A\ U\ P_A <=> S_B\ U\ P_B$. (3.5)

Это значит, что объединение подмножеств S_A и P_A однозначно соответствуют объединению подмножеств S_B и P_B.

Далее рассмотрим пример для числа $n=16$. Построим числовой отрезок [*0,32*] (см. рис. 2).

---

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ***16*** *17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32*

a_1 $\boldsymbol{n}$ b_1

Рис. 2

Запишем подмножество nch_A. Оно будет

$nch_A = \{15;13;11;9;7;5;3;1\}$.

Далее, подмножество nch_B будет состоять из следующих элементов

$nch_B = \{17;19;21;23;25;27;29;31\}$.

Мощности построенных подмножеств равны 8, т. е. $|nch_A| = |nch_B| = 8$.

Выберем в каждом из них нечетные составные и простые числа.

Получим

$S_A = \{15;9\}$, $P_A = \{13;11;7;5;3;1\}$, при чем, $|S_A| = 2$, а $|P_A|$

$=6$.

Аналогично

$S_B = \{21;25;27\}$, $P_B = \{17;19;23;29;31\}$, при чем, $|S_B| = 3$, а $|P_B| = 5$.

Построим таблицу соответствия подмножеств nch_A и nch_B для данного примера, а фактически таблицу симметричных пар

Таблица 2

nch_A

15

13

11

9

7

5

3

1

nch_B

17

19

21

23

25

27

29

31

δ

1

2

3

4

5

6

7

8

Теперь построим таблицу соответствия нечетных составных и простых чисел

Таблица 3

nch_A

15

13

11

9

7

5

3

1

S_A
15

9

P_A

13
11

7
5
3
1

nch_B
17
19
21
23
25
27
29
31

S_B

21

25
27

P_B
17
19

23

29
31

δ
1
2
3
4
5
6
7
8

Анализ таблицы 2 и 3 показывает, что при $\delta=2,7,8$ симметричными парами чисел являются исключительно простые числа (в таблице подчеркнуты одной чертой), т.е. *(1, 31), (3, 29), (13, 19)*.

Далее, рассмотрим случай числа $n=32$.

Подмножество нечетных чисел множества *A* и его мощность составляют

$nch_A=\{31;29;27;25;23;21;19;17;15;13;11;9;7;5;3;1\}$, $|nch_A|=16$.

Подмножество составных нечетных чисел и его мощность составляет

$S_A=\{27;25;21;15;9\}$, $|S_A|=5$.

Подмножество простых чисел и его мощность составляет

$P_A=\{31;29;23;19;17;13;11;7;5;3;1\}$, $|P_A|=11$.

Соответственно для подмножества *B*

$nch_B=\{33;35;37;39;41;43;45;47;49;51;53;55;57;59;61;63\}$, $|nch_B|=16$, а также подмножества составных нечетных и простых чисел.

Соответственно,

$S_B=\{33;35;39;45;49;51;55;57;63\}$, $|S_B|=9$,

$P_B=\{37;41;43;47;53;59;61\}$, $|P_B|=7$.

Таблица симметричных пар тогда будет

Таблица 4

nch_A

31

29

27

25

23

21

19

17

15

13

11

9

7

5

3

1

S_A

27

25

21

15

9

P_A

31

29

23

19

17

13

11

7

5

3

1

nch_B

33

35

37

39
41
43
45
47
49
51
53
55
57
59
61
63

S_B
33

35

39

45

49
51

55
57

63

P_B

37

41
43

47

59
61

δ
1

2
3
4
5
6
7

8
9
10
11
12
13
14
15
16

Из таблицы 4 видно, что симметричными простыми парами в этом примере будут пары при *δ=5,8,14,15* (в таблице подчеркнуты одной чертой), т.е. пары *(3, 61), (5, 59), (17, 47), (23, 41)*. Здесь же видим, что нечетные симметричные пары могут состоять также только из нечетных составных чисел *δ=4,9,12* (в таблице подчеркнуты двойной чертой) *(9, 55), (15, 49), (25, 39)*.

Следовательно, напрашивается вывод о том, что нечетные симметричные пары числа n могут состоять из:

1) нечетных составных и простых чисел (смешанные пары);

2) только нечетных составных чисел;

3) только простых чисел.

Дальнейший анализ числового ряда и составляющих симметричных пар с помощью подобных таблиц показывает, что при $n \to \infty$ можно составить такие неравенства

$|S_A| < |S_B|$, (3.6)

и соответственно

$|P_A| > |P_B|$. (3.7)

Оценку приведенных неравенств можно получить из следующих соображений.

Согласно оценке П.Л. Чебышева [2], уточняющую оценку Лагранжа [3], для больших значений n, число простых чисел в натуральном ряде достаточно точно оценивается следующим выражением

$\pi(n) = n/ln(n)$, (3.8)

где ln – натуральный логарифм.

Тогда для числа $2n$ количество простых чисел будет равно

$\pi(2n) = 2n/ln(2n)$. (3.9)

Используя выражения (3.8) и (3.9) можно записать

$|P_A| = \pi(n)$, а (3.10)

$|P_B| = \pi(2n) - \pi(n)$. (3.11)

Для того чтобы определить справедливость неравенства $|P_A| > |P_B|$ исследуем разность

$|P_A| - |P_B| = \pi(n) - \pi(2n) + \pi(n) = 2\pi(n) - \pi(2n)$. (3.12)

Далее раскрывая (3.12) с учетом (3.8) и (3.9), имеем

$2n/ln(n) - 2n/ln(2n) = 2n(1/ln(n) - 1/ln(2n))$. (3.13)

Так как $ln(2n) = ln2 + ln(n)$, то очевидно, что в выражении (3.13)

$ln(2n) > ln(n)$. (3.14)

Учитывая полученное неравенство (3.14) имеем

$1/ln(n) > 1/ln(2n)$. (3.15)

Отсюда получаем положительную следующую разницу

$|P_A| - |P_B| > 0$, (3.16)

что доказывает справедливость утверждения (3.7).

Исходя из (3.3) и (3.4) легко получается следующее равенство

$|S_B| - |S_A| = |P_A| - |P_B|$. (3.17)

Тогда с учетом (3.16) получаем

$|S_B| - |S_A| > 0$, (3.18)

что доказывает справедливость утверждения (3.6).

Теперь же особый интерес представляет способ формирования симметричных простых пар.

4. Таблица симметричных простых пар чисел

Для более глубокого понимания механизма образования симметричных простых пар чисел построим следующую таблицу.

В таблице в первой строке и первом столбце P_1 обозначения простых чисел, стоящих во второй строке и втором столбце по порядку. А во второй строке и втором столбце стоят сами простые числа по порядку. На пересечении столбца и строки в таблице находится число $2n$, по которому образуется симметричная простая пара. Очевидно, что таблица симметрична относительно диагонали.

Таблица 5

d_p *1 1 1 2 1 2 1 2 3 1 3 2 1 2 3 3 1*

P_1

P_2

P_3

P_4

P_5

P_6

P_7

P_8

P_9

P_{10}

P_{11}

P_{12}

P_{13}

P_{14}

P_{15}

P_{16}

P_{17}

P_{18}

1

3

5

7

11

13

17

19

23

29

31

37

41

43

47

53

59

61

P_1

1

1

2

3

4

6

7

9

10

12

15
16
19
21
22
24
27
30
31

P_2
3

3
4
5
7
8
10
11
13
16
17
20
22
23

25

28

31

32

P_3

5

5

6

8

9

11

12

14

17

18

21

23

24

26

29

32

33

P_4

7

7
9
10
12
13
15
18
19
22
24
25
27
30
33
34

P_5
11

11
12
14
15
17

20
21
24
26
27
29
32
35
36

P_6
13

13
15
16
18
21
22
25
27
28
30
33
36
37

P_7
17

17
18
20
23
24
27
29
30
32
35
38
39

P_8
19

19
21
24
25
28
30

31
33
36
39
40

P_9
23

23
26
27
30
32
33
35
38
41
42

P_{10}
29

29
30
33

35
36
38
41
44
45

P_{11}
31

31
34
36
37
39
42
45
46

P_{12}
37

37
39
40
42

45
48
49

P_{13}
41

41
42
43
47
50
51

P_{14}
43

43
45
48
51
52

P_{15}
47

47

50

53

54

P_{16}

53

53

56

57

P_{17}

59

59

60

P_{18}

61

61

где P_i – простые числа, образующие симметричные пары;

d_p – разница соседних простых чисел $P_{i+1} - P_i$ по строке или по столбцу.

Выделим основные свойства построенной таблицы 5:

во-первых, для любого числа *2n* по таблице можно составить симметричные пары простых чисел; а

во-вторых, для любой пары симметричных простых чисел можно найти соответствующие им числа *n* и соответствующее ему четное число *2n*.

Пользоваться таблицей очень просто.

Для этого берем любое четное число *2n* и в таблице находим соответствующее ему число *n*. Затем, двигаясь по горизонтальной строке и вертикальному столбцу, выбирается симметричная пара простых чисел.

Например, для четного числа 44, путем деления его на число 2 получаем число *n* равное 22. Затем по таблице выбираем ячейку с данным числом и пары симметричных простых чисел, соответствующих этому числу путем мысленного движения вверх по столбцу и влево по строке. Для числа 22 таких пар оказалось четыре. В результате имеем пары: (13,31); (7,37); (3,41); (1,43).

Если известна симметричная пара простых чисел и необходимо определить число ей соответствующее, выбирается строка и столбец, соответствующие паре, а затем на пересечении выбранных строки и столбца находиться число *n*, которому соотноситься выбранная симметричная пара.

Например, для пары простых чисел (13,31) в пересечении строки числа 13 (P_6) со столбцом числа 31 (P_{11}) выбираем число *n* равное 22. Тогда четное число 2*n* будет равно 44, которое равно сумме симметричной пары чисел.

Изучение полученной таблицы 5 показывает, что, она бесконечна и охватывает все натуральные числа от *1* до ∞.

Это следует из того, что множество простых чисел бесконечно, что позволяет сделать вывод о бесконечности и таблицы 5. В практических целях таблица 5 может ограничиваться тем предельным числом n, до которого исследуются симметричные простые числа.

Анализируя таблицу 5, можно предположить, что для любого числа от *1* до n найдется хотя бы одна симметричная пара простых чисел.

Заметим еще одно важное, но не совсем очевидное свойство таблицы 5.

Если обозначить разность между двумя соседними простыми числами в строке или столбце как d_{pi} , то она будет равна

$d_{pi}=p_{i+1} - p_i$, (4.1)

где p_i – i –тое простое число в строке или в столбце;

p_{i+1} – последующее простое число в строке или в столбце;

i – номер простого числа в строке или столбце.

Анализ показывает, что разности между двумя числами соседних строк или столбцов в таблице равны разности d_{pi} деленной на *2*, т.е. шагу симметрии

$\delta_i= d_{pi} /2$, (4.2)

где i – номер строки или столбца.

Приведем примеры (см. таблицу 5):

Имеем для восьмого (P_8) и девятого (P_9) столбца $i=8$,

$\Delta_8 = P_9 - P_8 = 23 - 19 = 4$;

А шаг симметрии будет $\delta_8 = d_{pi}/2 = 2$.

Тогда, по всему девятому столбцу имеем:

$a_{19} = a_{18} + \delta_8 = 10+2=12;$

$a_{29} = a_{28} + \delta_8 = 11+2=13;$

$a_{39} = a_{38} + \delta_8 = 12+2=14;$

$a_{49} = a_{48} + \delta_8 = 13+2=15;$

…………………

$a_{89} = a_{88} + \delta_8 = 19+2=21.$

Что подтверждается данными таблицы 5.

Далее, к примеру, для шестой (P_6) и седьмой (P_7) строк $i=6$ имеем:

$a_{67} = a_{66} + \delta_6 = 13+2=15;$

$a_{68} = a_{67} + \delta_7 = 15+1=16;$

$a_{69} = a_{68} + \delta_8 = 16+2=18;$

$a_{610} = a_{69} + \delta_9 = 18+3=21;$

…………………

$a_{618} = a_{617} + \delta_{17} = 36+1=37.$

Следует заметить, что в первом примере значение δ_i для всех элементов в столбце одинаковое, а во втором примере δ_i изменяется при переходе от одного элемента строки к другой в зависимости от номера столбца.

Если для определенности будем считать, что в верхней строке расположены простые числа a, в крайней левом столбце простые числа b, то чтобы не рассматривать зеркально верхнему треугольнику нижний от главной диагонали треугольник, следует принять условие $a \leq b$. Тогда в общем виде таблица 5 будет симметрична относительно главной диагонали и все свойства для нижней части таблица 5 будут идентичны свойствам для верхней части.

Таким образом, из вышесказанного обобщения можно записать следующие выражения:

– для всех элементов столбца

$a_{*i+1}=a_{*i}+\delta_i$;

– для всех элементов строки

$a_{i+1*}=a_{i*}+\delta_i$,

где

$\delta_i=(p_{i+1}-p_i)/2$;

$i=1,2,3, \ldots. k$ – номер столбца или строки в таблице 5;

$*$ – символ, обозначающий индексы по всей строке или столбцу.

И, наконец, исследуя симметричные числа либо на числовой оси (см. рис. 2) либо по таблице 5 можно выделить еще одно их свойство. Это относиться к тем арифметическим прогрессиям, которые они образуют. Выразим это свойство следующим утверждениями.

Утверждение 1. Любое число n натурального ряда больше 1 равно среднему арифметическому симметричных пар этого числа.

Доказательство данного утверждения очевидно и следует из выражения (1.5).

Из данного свойства вытекает и последующее свойство симметричных пар чисел, сформулированного в утверждении 2.

Утверждение 2. Любое число *n* натурального ряда больше *1* и принадлежащие ему симметричные пары числа являются членами арифметической прогрессии.

Доказательство указанного утверждения также очевидно и вытекает из выражений (1.7), (2.2).

Утверждение 3. Симметричная пара любого числа *n* больше *1* состоит из симметричных пар либо только четных, либо только нечетных чисел.

Доказательство.

Согласно (1.3) имеем:

$a = n - \delta$

$b = n + \delta,$

где $\delta = 1, 2 \ldots n$.

Отсюда следует, что для любого числа *n* пара чисел *a* и *b* будут иметь одинаковую четность, т.е. одновременно являются либо четными, либо нечетными, так как арифметические операции «+» и «–» являются однотипными.

5. Обобщающие выводы и четыре теоремы

Предыдущие разделы работы подвели к общим выводам представления четных чисел суммой двух других.

Исходя из вышеописанного можно сделать предположение, что любое четное число больше двух представимо одновременно в виде суммы двух чисел в следующих сочетаниях:

1) суммой симметричных пар четных чисел;

2) суммой симметричных пар нечетных чисел;

3) суммой симметричных пар нечетных составных чисел;

3) суммой симметричных пар простых чисел.

Доказательства сделанных утверждений подготовлены в предыдущих разделах, а некоторые фактически уже доказаны.

Однако приведем доказательства по каждому из данных утверждений в виде теорем.

Теорема 2. Любое четное число натурального ряда представимо суммой симметричных пар четных чисел.

Доказательство. Из определения самого натурального числа, леммы 1 и теоремы 1, следует, что любое натуральное число k большее *1* имеет k симметричных пар чисел a_i и b_i, таких, что их среднеарифметическое равно самому числу.

Действительно, если рассмотрим число k, а также его симметричные пары a_i и b_i, то их среднеарифметическое будет

$(a_i + b_i)/2 = k$. (5.1)

Но согласно (1.3) симметричные пары чисел можно записывать следующими выражениями $a_i = k - i$, $b_i = k + i$, то такие пары чисел при $i = \delta = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$.

Следовательно, их сумма будет удовлетворять выражению (5.1) и при этом будут симметричными.

Но так $n = 2k$, то отсюда следует, что любое четное число n представимо k парами симметричных чисел, таких что

$a_i + b_i = 2k$. (5.2)

Из выражения (5.2) также следует, что, так как в правой части стоит четное число, то сумма в левой части должна быть четной. В силу этого числа a_i и b_i должны быть одновременно либо четными, либо нечетными. Из свойств чисел натурального ряда следует, в силу утверждения 3, что симметричные числа a_i и b_i являются либо только четными, либо только нечетными.

Очевидно, что при $k>1$, из k симметричных пар, найдется хотя бы одна пара, в которой a_i и b_i являются только четными.

Из этого вытекает, что в множествах A и B да найдется хотя бы одна пара четных чисел, таких, что выполниться равенство (5.2), а это и доказывает теорему.

Теорема 3. Любое четное число натурального ряда больше *1* представимо суммой симметричных пар нечетных чисел.

Доказательство. Запишем четное число в виде $n = 2k$. Тогда из доказательства предыдущей теоремы 2 вытекает, что любое четное число представимо симметричной парой $a_i + b_i = 2k$. Очевидно, в силу утверждения 3, при $k>1$ найдется симметричная пара, в которой a_i и b_i являются только нечетными.

Из этого вытекает, что во множествах A и B да найдется хотя бы одна пара нечетных симметричных чисел, таких, что выполниться равенство (5.2), а это и доказывает теорему

Из свойств ряда натуральных чисел доказательства предыдущей теоремы 2 вытекает, что любое четное число представимо симметричной парой нечетных чисел.

Теорема 4. Любое четное число натурального ряда больше *2* представимо суммой симметричных пар простых чисел.

Доказательство. Рассмотрим множество нечетных чисел nch_A меньших n, и множество нечетных чисел nch_B больших n и меньших $2n$, т.е. $|nch_A| < n$; $n <|nch_A| < 2n$.

Согласно доказательству в теореме 3 для любого числа n больше 2 найдутся симметричные пары нечетных чисел a и b.

Выше было показано, что эти множества состоят из подмножеств нечетных составных и простых чисел, таких что

$nch_A = S_A\ U\ P_A$, $nch_B = S_B\ U\ P_B$, $|S_A| + |P_A| = |S_B| + |P_B|$, $|P_A| > |P_B|$, $|S_A| < |S_B|$. (5.3)

В предыдущей теореме 3 было доказано, что из двух множеств A и B найдется пара a и b такая, что в этой паре числа будут четные или нечетные.

Рассмотрим далее два множества простых чисел P_A и P_B.

Допустим, что для числа n из всей совокупности симметричных пар (a, b) не нашлось ни одной симметричной пары простых чисел, то есть в паре (a, b) элементы не являются простыми числами. Это значит, что множество P_A и множество P_B не пересекаются по симметричным парам, то есть $P_A \cap P_B \equiv \varnothing$.

Так как, в силу (2.7) и (5.3), $|nch_A| = |nch_B|$, и $nch_A = S_A \cup P_A$, $nch_B = S_B \cup P_B$, а во множествах P_A и P_B не нашлось ни одного симметричного числа, то, следовательно, если $|P_A| \neq 0$ и $|P_B| \neq 0$, то возможно два варианта:

1) Множество S_A должно включать некое подмножество $\acute{S}_A$, которое должно полностью соответствовать множеству P_B, т.е. $S_A = P_B \cup \acute{S}_A$. Аналогично, множество S_B должно включать некое подмножество $\acute{S}_B$, соответствующее множеству P_A, т.е. $S_B = P_A \cup \acute{S}_B$. В этом случае должны выполняться следующие равенства

$|S_A| = |P_B| + |\acute{S}_A|$, а $|S_B| = |P_A| + |\acute{S}_B|$. (5.4)

Тогда, согласно (2.7) мощности нечетных чисел nch_A и nch_B равны, откуда с учетом (5.4) запишем

$|P_B| + |\acute{S}_A| + |P_A| = |P_A| + |\acute{S}_B| + |P_B|$. (5.5)

Не трудно показать, что при данном предположении должно выполняться следующее равенство

$|\acute{S}_A| = |\acute{S}_B|$. (5.6)

Поэтому, рассмотрим значение $|\acute{S}_A|$, а затем распространим его на $|\acute{S}_B|$.

Не трудно видеть, что в этом случае количество нечетных чисел левой и правой полуоси натурального ряда должны быть равны

$|nch_A| = |nch_B| = |S_A| + |P_A| = |S_B| + |P_B| = n/2$. (5.7)

Тогда, согласно (5.4) и (5.5) имеем

$|P_B| + |\acute{S}_A| + |P_A| = n/2$. (5.8)

Отсюда

$|\acute{S}_A| = n/2 - (|P_B| + |P_A|)$. (5.9)

Учитывая выражения (3.10) и (3.11) перепишем (5.9)

$|\acute{S}_A| = n/2 - \pi(2n)$. (5.10)

Подставляем в (5.10) значения из (3.8) и получаем оценку симметричных пар, включающих только нечетные составные числа

$|\acute{S}_A| = n/2 - 2n/ln(2n)$. (5.11)

Рассмотрим предел функции (5.11) при $n \to \infty$

$lim(|\acute{S}_A|) = lim(n/2 - 2n/ln(2n))$. (5.12)

$n \to \infty$ $n \to \infty$

Согласно свойствам пределов имеем

$lim(n/2)\ lim(1 - 4/ln(2n)) = 1/2\ lim(n) = n/2$ (5.13)

$n \to \infty$ $n \to \infty$ $n \to \infty$

Таким образом, получаем противоречие, заключающееся в том, что при стремлении n в бесконечность число нечетных составных чисел будет существенно больше простых.

2) Множество S_A должно полностью соответствовать множеству P_B, т.е. $|S_A| = |P_B|$. Аналогично, множество S_B должно полностью соответствовать множеству P_A, т.е. $|S_B|=|P_A|$.

Далее из (5.3) имеем, $|P_A| > |P_B|$, $|S_A| < |S_B|$ и $|S_A| > |P_A|$,

$|S_B| > |P_B|$.

Но так как $|S_A| = |P_B|$ и одновременно $|P_A| > |P_B|$, то отсюда следует, что должно быть $|P_A| > |S_A|$, что противоречит начальному условию (5.3).

Следовательно, предположение, что множество P_A и множество P_B не пересекаются по симметричным парам, то есть $P_A \cap P_B \equiv \emptyset$ неверно и это доказывает, что найдется хотя бы одна симметричная пара простых чисел для представления данного четного числа.

Теорема 4. Любое четное число натурального ряда больше 2 представимо суммой симметричных пар нечетных составных чисел.

Доказательство. Согласно доказанной теореме 3 любое четное число натурального ряда больше 2 представимо суммой симметричных пар нечетных чисел.

Рассмотрим множество нечетных чисел nch_A меньших n и множество нечетных чисел nch_B больших n и меньших $2n$, т.е.

$\{nch_A\} < n$;

$n < \{nch_B\} < 2n$. (5.14)

Выше было показано, что эти множества состоят из подмножеств симметричных составных нечетных и простых чисел, таких что

$nch_A = S_A \cup P_A$ и $nch_B = S_B \cup P_B$.

Далее, согласно (3.2) мощности указанных множеств равны, т.е. $|nch_A| = |nch_B|$. При этом, в соответствии с (3.3) равны и суммы мощностей подмножеств симметричных нечетных составных и простых чисел обеих множеств, т.е. $|nch_A| = |S_A| + |P_A|$ и $|nch_B| = |S_B| + |P_B|$.

Заметим, как показано выше, что имеется однозначная функциональная зависимость между элементами указанных двух множеств, а именно каждому элементу из множества nch_A найдется единственный элемент в множестве nch_B, или в символьной записи $nch_A{}^i \rightarrow nch_B{}^i$.

Рассмотрим теперь два подмножества симметричных нечетных составных чисел S_A и S_B.

Допустим, что утверждение теоремы неверно, т.е. не существует двух симметричных нечетных составных чисел из S_A и S_B, или иначе говоря, подмножество функциональной зависимости пусто или $S_A{}^i \rightarrow S_B{}^i = \varnothing$.

Тогда, если во множествах S_A и S_B не нашлось ни одной симметричной пары нечетных составных чисел, то, следовательно, с учетом (5.3) мощность множества S_A должна быть равна мощности множества P_B, т.е. $|S_A| = |P_B|$. Аналогично рассуждая для множества должно выполняться и следующее равенство $|S_B| = |P_A|$. В этом случае применяя рассуждения теоремы 2 можно прийти к противоречию, т.е. к тому, что $|P_B| > |S_A|$, а это противоречит начальному условию (5.3). Теорема доказана.

6. Сильная гипотеза Гольдбаха и теорема Гольдбаха-Эйлера

Доказанные в предыдущем разделе теоремы вплотную подводят нас к сильной или бинарной гипотезе Гольдбаха [1], которую также сформулировал Эйлер [4] и которая гласит: любое четное число больше двух представимо в виде суммы двух простых чисел. Как показано выше, приведенные исследования в общем виде бинарная гипотеза Гольдбаха не совсем верна, так как сумма двух любых простых чисел будет соотноситься только к числу, которое получается делением четного числа на *2*.

Запишем данное утверждение не в виде гипотезы, а в виде теоремы.

Исходя из сказанного, сформулируем сильную или бинарную теорему Гольдбаха-Эйлера в следующем виде:

Теорема 6 (сильная или бинарная). Любое четное число больше двух представимо в виде суммы двух простых чисел и только таких, которые являются симметричной парой простых чисел соответствующей числу вдвое меньшему самого четного числа.

Доказательство этой теоремы найдем в доказательстве теоремы 5.

Следует заметить, что иных разложений четного числа в виде суммы простых чисел не существует. Это следует из материалов раздела 5.1 и 5.2.

7. Проблема представления любого числа в виде суммы нескольких простых чисел (тернарная проблема Гольдбаха)

С использованием симметричных простых чисел, может быть и решена тернарная проблема Гольдбаха, сформулированная им в 1742 году. Его предположение, что всякое нечетное число, большее 5 можно представить в виде суммы трех простых, решается следующим способом.

7.1. Представление нечетных чисел в виде суммы трех простых чисел.

Представим нечетное число в виде

$nch=2n+1$. (7.1)

Тогда, используя результаты, полученные в разделе 5, можно записать следующее представление

$2n=p_1+p'_2$, (7.2)

где p_1, p'_2 – симметричная пара простых чисел.

Подставив (7.2) в (7.1) получим

$nch= p_1+p'_2+1$. (7.3)

Очевидно, что p'_2+1 является четным числом и, следовательно, к нему также можно применить разложение в виде суммы двух чисел, т.е.

$p'_2 + 1= p_2 + p_3$, (7.4)

где p_2, p_3 – симметричная пара простых чисел.

Далее подставляя (7.2), (7.3) и (7.4) в (7.5) окончательно получаем

$nch = p_1 + p_2 + p_3$, (7.5)

где p_1, p_2, p_3 – числа симметричных пар.

Таким образом, сформулируем

Теорему 7: Любое нечетное число представимо в виде суммы трех простых чисел.

Доказательство приведено выше.

Исходя из свойств нечетных чисел и доказанных выше утверждений и теорем, можно утверждать, что нечетное составное число невозможно по природе представить в виде суммы двух простых чисел.

Возможно ли представление нечетного числа в виде суммы трех простых чисел.

7.2. Представление нечетных чисел в виде суммы двух других чисел.

Рассмотрим выражение нечетного числа (7.1).

Разделим его на 2 и получим

$nch/2 = n + ½$. (7.6)

Очевидно, что число (7.6) на числовой оси ряда действительных чисел находится точно в середине отрезка $[n, n+1]$, такого, что сумма чисел, находящихся на концах отрезка будет равна нечетному числу nch.

Тогда, если обозначить число n как a_1, а число $n+1$ как b_1, то их сумма будет равна $a_1 + b_1 = 2n+1$.

В этом случае число n можно принять ближайшим левым числом к центру симметрии, а число $n+1$ является ближайшим правым числом симметрии.

Двигаясь от центра симметрии можно получить множество симметричных пар, a_i и b_i, таких, что $a_i + b_i=2n+1$, где $i = 1,2,3\ldots n$. Очевидно, что числа симметричных пар a_i и b_i имеют разную четность.

8. Алгоритм представления четных чисел в виде двух простых чисел.

При заданном четном числе алгоритм представления его в виде суммы двух простых чисел будет следующим.

8.1. Разделим четное число ch на два и получим новое число n.

8.2. По таблице симметричных пар простых чисел находим место нахождения числа n.

8.3. Двигаясь по горизонтальной строке влево до крайнего левого столбца находим значение первого простого числа p_1.

8.4. Двигаясь по вертикальному столбцу вверх до крайней верхней строки находим значение второго простого числа p_2.

8.5. Записываем 1-ое представление четного числа в виде суммы двух простых чисел следующим образом:

$ch= p_1+ p_2$.

8.6. По таблице симметричных пар простых чисел находим следующее местонахождение числа n и переходим к п. 8.3. Если такого элемента не находим, то переходим к п. 8.7.

8.7. Переписываем все полученные представления четного числа в виде суммы двух простых чисел.

9. Представление простых чисел

Результаты предыдущей главы позволяют исследовать задачу представления простых чисел в виде суммы нескольких других простых чисел.

9.1. Представление простых чисел в виде суммы трех простых чисел.

Действительно, в разделе 8 было показано, что любое нечетное число представимо в виде суммы трех простых чисел. Следовательно, и любое простое число также представимо в виде суммы трех простых чисел, так как множество простых чисел одновременно является и подмножеством нечетных чисел.

Пусть нечетное число является простым

Тогда, согласно теореме 7 разложение простого числа p запишем

$p = p_1 + p_2 + p_3$, (9.1)

где p_1, p_2, p_3 – простые числа.

Не сложно показать, что

$p >= p_1 > p_2 > p_3$, (9.2)

Следует заметить, что представление простого числа p в виде суммы трех простых чисел p_1, p_2, p_3 является не единственным.

Рассмотрим далее следующие три суммы $p_1 + p_2$, $p_1 + p_3$, $p_2 + p_3$, из которых можно записать три интересных выражения

$p_1 + p_2 = 2n_1$;

$p_1 + p_3 = 2n_2$; (9.3)

$p_2 + p_3 = 2n_3$.

Не трудно видеть, что суммы правых и левых частей выражения (9.3) равны, т.е.

$p = p_1 + p_2 + p_3 = n_1 + n_2 + n_3$. (9.4)

Числа n_1, n_2, n_3 обладают следующими интересными свойствами.

1) Числа n_1, n_2, n_3 являются центрами симметрии:

n_1 – для $p_1 + p_2$;

n_2 – для $p_1 + p_3$; (9.5)

n_3 – для $p_2 + p_3$.

2) Из чисел n_1, n_2, n_3 может быть такое сочетание, что все они нечетные, либо два четных, а одно нечетное.

3) Выполняется следующее равенство

$(p_1 - n_1) + (p_2 - n_2) + (p_3 - n_3) = 0$. (9.6)

Из равенства (9.6) вытекает следующее неравенство

$n_1 > n_2 > n_3$. (9.7)

Действительно из неравенства (9.2) $p_1 > p_2 > p_3$ можно записать $p_1 > p_2$, $p_1 > p_3$; $p_2 > p_3$. Отсюда следует, что $p_1 + p_2 > p_1 + p_3$, а это значит с учетом (9.2) и $n_1 > n_2$. Аналогично имеем $p_1 + p_3 > p_2 + p_3$, что означает с учетом (9.2) $n_2 > n_3$, доказывающее неравенство (9.7).

9.2. Слабая гипотеза Гольдбаха.

Полученные выше результаты позволяют записать следующую теорему.

Теорема 8. Любое простое число больше семи представимо в виде суммы трех простых чисел.

Доказательство теоремы очевидно из рассуждений раздела 6.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Иэн Стюарт. Территория простых чисел. Проблема Гольдбаха // Величайшие математические задачи. – М.: «Альпина нон-фикшн», 2016. – 460 с. – ISBN 978-5-91671-507-1.

2. П.Л. Чебышев. О простых числах. – Санкт-Петербург, 1850, с. 33

3. A. M. Legendre. Essai sur la theorie de Nombres, 2nd edition.– Paris, 1808, p. 394.

4. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle (Band 1), St.-Pétersbourg 1843, S. 125—129 Архивная копия от 1 июля 2019 на Wayback Machine